LA TASA DE INTERES IMPLICITA EN UN SISTEMA DE REPARTO CON ESTADOS RELATIVAMENTE ESTACIONARIOS

Cr. Luis Camacho

LA TASA DE INTERES IMPLICITA EN UN SISTEMA DE REPARTO CON ESTADOS RELATIVAMENTE ESTACIONARIOS

Introducción

La asociación de tasas de interés en un sistemas de reparto, puede resultar llamativa como consecuencia de que en dicho régimen no existen reservas. Sin embargo, como veremos más adelante es posible realizar tal asociación cuando consideramos los aspectos financieros respecto a cada uno de los cotizantes al régimen.

En tal sentido cabe apreciar que los afiliados realizan aportes en distintos períodos de su vida laboral con la esperanza de obtener una prestación mensual en el período de retiro. Desde un punto de vista actuarial, el equilibrio financiero entre aportes y prestaciones individuales se obtiene igualando ambos tipos de flujos de fondos descontados a una tasa de interés técnico. Si este equilibrio se da para tasas positivas, el régimen de reparto computa "intereses" ó "revalorizaciones" de las cotizaciones para alcanzar los niveles jubilatorios previstos. La tasa asociada a tales intereses o revalorizaciones es la que denotamos como la tasa de interés implícito en el sistema de reparto.

El presente análisis tiene como objetivo estimar tal tipo de tasa para regímenes de reparto que presentan ciertas particularidades: todos sus estados financieros (recursos y erogaciones) y físicos (cotizantes, jubilados) varían de un año a otro a un nivel de crecimiento constante. Esta situación se puede presentar en regímenes maduros y en horizontes de muy largo plazo tal cual se podrá apreciar más adelante.

La metodología seguida consiste en partir del análisis de algunos conceptos de carácter general que servirán para aclarar el desarrollo posterior de ciertas expresiones, para luego evaluar en forma analítica la ecuación de equilibrio financiero global del sistema de reparto y comparar sus principales resultados con los asociados al equilibrio financiero individual.

Consideraciones previas

Previamente al desarrollo de las ecuaciones de equilibrio financiero, consideramos de interés realizar ciertos análisis y comentarios sobre dos temas que consideramos de especial importancia para comprender los desarrollos algebraicos que se realizarán con posterioridad. Ambos temas se refieren por un lado a los distintos tipos de tasas de interés con las que se pueden efectuar los cálculos financieros y por otro las formulaciones generales con las que vamos a operar para el cómputo de las rentas contingentes a analizar.

1) Tipos de tasas de Interés

Los tipos de tasas de interés con los que es posible operar con las rentas financieras individuales y las proyecciones financieras globales que consideraremos en este análisis son los siguientes:

- Tasa de interés efectivo anual, que denotamos por "i", es la tasa que rige para operaciones financieras con flujos de fondos expresados en valores corrientes.

- Tasa de interés real sobre precios, "i(p)" es la tasa de interés aplicable en operaciones en las que los flujos de fondos están expresados en valores constantes, es decir los valores corrientes son deflactados por la variación del Indice de Precios al Consumo de cada período. Por lo tanto podemos obtener esta tasa a partir de "i" y de la tasa de crecimiento anual de los precios que denotaremos por "p", de la siguiente forma:

$$1+ i(p) = (1+i) / (1+p) \qquad \textbf{[1]}$$

Al trabajar con "i(p)" en lugar de con "i", evitamos considerar explícitamente la inflación en el análisis puesto que computamos flujos de fondos independientes de la variación de los precios de consumo.

- Tasa de interés real sobre salarios "i(s)" es la tasa de interés aplicable en operaciones en la que los flujos de fondos están expresados en valores constantes en términos de salarios, por lo que los valores corrientes son deflactados por la variación no sólo del Indice de Precios al Consumo sino por el crecimiento real que se verifica en los sueldos promedio a través de la variación real "s". Debemos aclarar que "s" es el crecimiento del salario por sobre el crecimiento del Indice de Precios al Consumo, al que suponemos constante para todo el horizonte de análisis. En vista de ello, es válida la siguiente expresión, que relaciona i(s) con i(p): .

.
$$1+i(s) = (1+i(p))/ (1+s) \qquad \textbf{[2]}$$

Al trabajar con i(s) en lugar de con i(p), evitamos considerar en forma explícita la evolución de los salarios promedios por cambios en la productividad en el análisis puesto que consideramos flujos de fondos independiente de la variación de los salarios.

2) Valor actual de una renta anual

En este punto supondremos, a efectos de simplificar el análisis, pagos o cobros anuales que se efectivizan al principio de cada año durante "n" años bajo la condición de que la persona que debe efectuar el pago o el cobro se encuentre con vida al momento del mismo.

Para ello realizaremos previamente las siguientes definiciones:

- Edad de la persona al inicio de la renta : x

- Número de sobrevivientes a la edad “x” según tabla de mortalidad utilizada: l_x
- Probabilidad de que esté con vida a la edad “k”: l_k / l_x
- Importe del pago o cobro anual: C (constante en términos de salarios)
- Tasa de interés aplicable: i(s)

Estamos en condiciones ahora de expresar los valores esperados de cobros y/o pagos al inicio de una edad cualquiera “k” comprendida entre “x” y “x+n-1” (n pagos) como:

$$\text{Valor a la edad “x” de la Cuota de la edad “k”} = C * l_k / l_x * (1+i(s))^{(x-k)}$$

Los tres factores tienen la siguiente justificación:

- “C” porque es la cuota anual de cobro o pago.
- “l_k / l_x” que expresa la probabilidad de que la persona de edad “k” esté con vida, considerando que al inicio de la renta (edad x) lo estaba. Téngase presente que la cuota se verifica sólo en caso de vida de la persona afectada.
- “$(1+i(s))^{(x-k)}$” es el factor de actualización de la cuota a la edad x. Como la cuota se produce (k-x) años después del inicio de la renta, la misma se debe calcular financieramente mediante la aplicación del factor de actualización v= 1/(1+i(s)) elevado a la cantidad de años que van desde “x” hasta “k”.

Para obtener el valor de la renta, (todos los pagos desde “x” hasta “x+n-1”), basta con realizar la siguiente suma:

$$\text{Valor a la edad “x” de la Renta} = \text{Suma}_{k=x}^{k=x+n-1} \; C * l_k / l_x * (1+i(s))^{(x-k)}$$

Si hacemos el siguiente cambio de variables: j = k-x, la expresión anterior puede ser planteada como:

$$\text{Valor a la edad x de la Renta} = \text{Suma}_{j=0}^{j=n-1} \; C * l_{x+j} / l_x * (1+i(s))^{(-j)}$$

Si definimos a:

$$\mathbf{a}(i(s))_{\mathbf{x,n}} = \text{Suma}_{j=0}^{j=n-1} \; l_{x+j} / l_x * (1+i(s))^{-j} \qquad \textbf{[3]}$$

Podemos llegar a la expresión final para el valor actual siguiente[1] :

$$\text{Valor a la edad x de la Renta} = C * \mathbf{a}(i(s))_{\mathbf{x,n}}$$

Téngase presente que estamos considerando una renta contingente con “n” pagos anuales de “C” unidades monetarias que no están afectadas por el crecimiento de

[1] Tecnicas Actuariales de la Seguridad Social. Peter Thullen . Capítulo II Formulas Actuariales de Base. Oit. Ginebra 1974,

salarios que se pueda producir en todo el período y que se comienzan a realizar a partir de la edad "x" de la persona afectada por la renta.

Ecuación de Equilibrio Financiero para un régimen de reparto

1) Planteo General

El equilibrio financiero de un sistema de reparto se produce anualmente, por lo que en ese período deben igualarse los ingresos con los egresos del sistema. Para el planteo de la ecuación que represente tal equilibrio realizaremos previamente las siguientes definiciones:

*** A (t) = Número de Activos en el año t**

* S(t) = S * A(t) = Masa salarial del año t de cotizantes (con S igual al salario promedio de actividad)

* R(t) = Número de Jubilados totales al año t

* B(t) = r * S * R(t) = Egresos del año t por jubilaciones (con r igual a la tasa de remplazo)

* TC(t) = tasa de contribución sobre salarios del año t.

Estas definiciones implican ciertos supuestos, establecidos al sólo efectos de simplificar la exposición, puesto que pueden ser levantados sin que los resultados varíen significativamente. Las suposiciones que en este caso realizamos son:

- las cotizaciones y las prestaciones se pagan una vez al año.
- no se incluyen las prestaciones jubilatorias por invalidez ni las pensiones por sobrevivencia tanto de activos como de pasivos.
- no existe movilidad salarial vertical ni horizontal de los salarios.
- no se incluyen en el análisis los gastos de administración del sistema

Bajo tales supuestos la ecuación de equilibrio del sistema puede ser expresada como:

$$\underline{\text{Ingresos}} = \underline{\text{Egresos}}$$

$$TC(t) * S(t) = B(t)$$

También podemos plantear la siguiente igualdad:

$$TC(t) * S * A(t) = r * S * R(t) \qquad \textbf{[4]}$$

Resulta evidente que para estos casos, la variable de ajuste será la tasa de cotización, pues es la que en caso de un sistema de prestación definida es la que debería cambiar cada año para lograr el equilibrio, dado que las restantes variables vienen dadas.

Es interesante tener presente las consecuencias que se derivan cuando existe maduración demográfica y se llega a estados que son relativamente estacionarios, es decir cuando tanto las variables demográficas como financieras tienen una variación persistente en términos relativos, tal cual se aprecia seguidamente :

1) Crecimiento demográfico constante:

Se presenta cuando tanto los cotizantes como los jubilados crecen anualmente a la misma tasa:

$$\frac{A(t)}{A(t-1)} - 1 = \frac{R(t)}{R(t-1)} - 1 = c \qquad \textbf{[5]}$$

Como se verá más adelante, "c" es la tasa de crecimiento del número anual de cotizantes en el largo plazo[2]. Evidentemente para que esta situación se pueda presentar debe pasar por lo menos una generación entera de cotizantes desde su alta hasta su fallecimiento.

2) Crecimiento financiero constante:

Se presenta cuando tanto los ingresos por aportes como los egresos por jubilaciones crecen anualmente a la misma tasa:

$$\frac{B(t)}{B(t-1)} - 1 = \frac{S(t)}{S(t-1)} - 1$$

Cuando no existen aumentos previstos de salarios reales en el horizonte, la tasa de crecimiento será sólo la de crecimiento demográfico "c", pero si existe un aumento de salario real de orden de "s" por año promedio, el crecimiento financiero a largo plazo será igual a:

$$\mathbf{(1+s)*(1+c) - 1} \qquad [6]$$

que es la tasa de crecimiento acumulada de los salarios reales y la de los cotizantes, tal cual se podrá apreciar más adelante.

A continuación plantearemos la ecuación de equilibrio en forma más desagregada, puesto que consideraremos a los cotizantes y jubilados por edad. Para ello se deberá analizar en forma separada a los cotizantes, a las cotizaciones, a los jubilados y a las jubilaciones, para luego sí consolidar todos los resultados en la formulación específica de una ecuación de equilibrio final.

[2] Actuarial mathejmatics of social security pensions. Subramaniam Iyer. Capítulo The financing of social Security Pensions. ILO-ISSA1999

2) Evolución de los cotizantes por edad y tiempo t.

Consideremos la siguiente notación adicional:

$A(x, t)$ = Número de activos cotizantes de edad x en el año t
x_o = edad de inicio de actividad (igual para todos los cotizantes)
m = años de actividad
x_r = edad de retiro = x_o +m

Asumamos asimismo que se verifica un crecimiento anual del numero de cotizantes a la edad de inicio a la tasa "c". Por lo tanto, se cumple que:

$$A(x_o,t) = A(x_o,0) *((1+c)^t)$$

Donde t=0 es el año de inicio del sistema, y "t" es el año considerado para determinar el número de altas a la edad x_o (que es la de inicio).

Para cada edad podemos expresar, en el largo plazo, el número de cotizantes de la edad de inicio en cualquier año t, a partir de los de la edad de inicio en el origen.

$$A\ (x_o+j\ ,\ t) = (A(x_o,\ 0) *\ (1+c)^{(t-j)}\ ) *\ (\ l_{xo+j}\ /\ l_{xo}\ ) \qquad \textbf{[7]}$$

Los dos principales factores tienen la siguiente justificación:

- "$(A(x_o,\ 0) *\ (1+c)^{(t-j)}\ )$" porque los cotizantes de edad x_o+j , en el año t, provienen de las altas de cotizantes producidas (t-j) años atrás.
- "$l_{xo+j}\ /\ l_{xo}$" expresa la probabilidad de que la persona de edad "x_o+j" esté con vida, considerando que la edad de altas sea x_o.

Por lo tanto, el número total de cotizantes será igual a la suma de los cotizantes de todas las edades posibles entre x_o y x_o+m-1:

$$A(t) = \underset{j=0}{\overset{j=m-1}{\text{Suma}}}\ (\ A(x_o,0)*\ ((1+c)^{(t-j)}) *\ lx_o+i\ /\ lx_o$$

Para que el régimen entre en un estado estacionario es necesario que pasen por lo menos m años , es decir que se debe cumplir que t >= m.

La expresión anterior puede ser planteada también como:

$$A(t) = \quad A(x_o,0) * ((1+c)^t * \quad \text{Suma} \underset{j=0}{\overset{j=m-1}{(1+c)^{-j} * lx_o+j\ /\ lx_o\ )}} \quad (\ t >=m\ )$$

Si además tenemos en cuenta el resultado de **[3]** llegamos al siguiente resultado:

$$A(t) = \quad A(x_o,0) \ *\ (1+c)^t \ *\ a(c)_{\mathbf{xo,m}} \qquad (\ t >=40\ ) \qquad \textbf{[8]}$$

De la expresión anterior, se puede apreciar que como $A(x_o,0)$ y $a(c)_{\mathbf{xo,m}}$ son constantes respecto a "t", sólo el otro factor es el que varía al cambiar "t", por lo tanto puede deducirse fácilmente que para dos años consecutivos, el crecimiento relativo de los crecimientos será (para t>40) igual a:

$$A(t+1) \; / \; A(t) \; - 1 \; = \; c$$

Resultado que coincide con lo planteado en **[5]**

Una propiedad adicional se presenta y es que la tasa de crecimiento anual de los cotizantes no se da también para cualquier edad activa, lo cual puede ser fácilmente comprobable al comparar el número de cotizantes por edad de dos años consecutivos a partir de t>=40.

3) Evolución de las cotizaciones

Supongamos inicialmente, a los efectos de simplificar la exposición, que no existen movilidades salariales verticales durante la vida activa producto de los ascensos y promociones que se puede verificar en ese período.

Por lo tanto si partimos de un salario promedio al establecerse el régimen (t=0) de S y si se acepta un crecimiento real de los salarios de nivel constante a una tasa anual de “s”, podemos establecer que el nivel del salario promedio para el año “t”, será igual a $S^*(1+s)^t$

Entonces, la masa salarial de los cotizantes “S(t)” puede ser planteada como:

$$\begin{aligned} S(t) &= S \; * \; (1+s)^t \; * \; A(t) = \\ &= S \; * \; (1+s)^t \; * \; A(x_o,0) \; * \; (1+c)^t \; * \; a(c)_{\mathbf{xo,m}} \end{aligned}$$

Si comparamos para los años en que en el régimen se presenta en estados estacionarios, la relación de la masa salarial de un año con el siguiente puede ser expresada como:

$$S(t+1) \; / \; S(t) \; -1 \; = (1+s)^*(1+c) -1$$

Resultado que coincide con lo planteado en **[6]**

4) Evolución de los Jubilados por edad y tiempo

Nuestro objetivo en este punto es analizar las expresiones asociadas al número total de jubilados por edad vigentes a cada año del horizonte de análisis. Para ello planteamos las siguientes notaciones adicionales:

R(x, t) = Número de jubilados de edad “x” en el año “t”
w = edad final de la tabla de supervivencia

Para cada edad simple podemos expresar, en el largo plazo, el número de jubilados a cualquier edad para el año “t” a partir de la fórmula **[7]** de la siguiente forma:

$$R(x_o+j,t) = A(x_o+j,t) = A(x_o,0) *((1+c)^{t-j}) * lx_o+j / lx_o$$

Téngase presente que la relación anterior implica aceptar que los activos con edades superiores a las de actividad se transforman necesariamente en pasivos, ya que hemos establecido el supuesto de que existe una sola edad de retiro. Además la expresión anterior es válida para t >m+n que es a partir de cuando el régimen se transforma en estacionario.

El número total de jubilados lo obtenemos a partir de la siguiente suma:

$$R(t) = \underset{j=m}{\overset{j=w-1}{\text{Suma}}} (A(x_o,0)* ((1+c)^{(t-j)}) * lx_o+j / lx_o$$

Si efectuamos el siguiente cambio de variables: k= j-m , el siguiente resultados es equivalente al anterior:

$$R(t) = \underset{k=0}{\overset{k=w-x_o-m-1}{\text{Suma}}} (A(x_o,0)* ((1+c)^{(t-k-m)}) * lx_o+k+m / lx_o$$

Realizando simples transformaciones algebraicas la expresión anterior se transforma en:

$$R(t) = A(x_o,0) * (1+c)^{t-m} * lx_o+m/lx_o * \underset{k=0}{\overset{k=w-x_o-m-1}{\text{Suma}}} (1+p)^{-k} * lx_o+m+k / lx_o+m$$

Como por **[3]** la sumatoria es igual a $a(c)_{\mathbf{xo+n,w-xo-m}}$, podemos concluir que es válida la siguiente expresión:

$$R(t) = A(x_o,0)*(1+c)^{(t-m)} *lx_o+m/lxo*a(c)_{\mathbf{xo+n,w-xo-m}}$$

S puede apreciar que como $A(x_o,0)$ y $a(p)_{\mathbf{xo+n,w-xo-m}}$ son constantes respecto a t, sólo el último factor es dependiente de t, por lo tanto puede deducirse fácilmente que para dos años consecutivos, el crecimiento relativo de los crecimientos será (para t>=m+n) igual a:

$$R(t+1) / R(t) - 1 = c$$

Resultado que coincide con lo planteado en **[5]**

Este resultado más el relacionado con los activos permite afirmar que el sistema se vuelve completamente estacionario y maduro, a partir de m+n años desde la puesta en práctica del sistema, ya que todos los estados activos y pasivos evolucionan en forma relativamente estacionaria.

5) Evolución de las erogaciones por Jubilaciones

Supongamos que nivel de la jubilación se determina aplicando la tasa de remplazo "r", al sueldo de actividad vigente a la fecha de cumplir la edad de retiro.

Por lo tanto, las erogaciones totales por jubilación B(t) puede ser planteada como sigue:

$$B(t) = r * S * (1+s)^t * R(t) =$$
$$= r * S * (1+s)^t * A(x_o,0) * (1+c)^{(t-m)} * lx_o+m/lxo*a(c)_{\mathbf{xo+n,w-xo-m}}$$

Si comparamos para los años en que el régimen es de estados estacionarios, la relación de los egresos por jubilaciones de un año con el siguiente puede ser expresada como:

$$B(t+1) \;/\; B(t) -1 = (1+s)*(1+p) -1$$

Por lo tanto, el crecimiento anual de las prestaciones estará afectado, al igual que la masa salarial de los cotizantes, tanto por el crecimiento del salario real como por el crecimiento del número de cotizantes, tal cual fue planteado en **[6]**.

6) La Ecuación de Equilibrio

Como en el sistema de reparto que estamos considerando, por **[4]** debe cumplirse la igualdad entre ingresos y egresos del mismo año, teniendo como variable de ajuste la tasa de aporte TC(t). Por lo tanto para el caso sujeto a estudio en el que consideramos crecimiento del salario real anual se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$TC(t) * S * (1+s)^t * A(x_o,0) * (1+c)^t * a(c)_{\mathbf{xo,m}} =$$
$$= r * S * (1+s)^t * A(x_o,0) * (1+c)^{(t-m)} * lx_o+m/lx_o*a(c)_{\mathbf{xo+n,w-xo-m}} \qquad \textbf{[9]}$$

Si simplificamos de ambos miembros las expresiones comunes, excepto S, podemos obtener una nueva ecuación que es equivalente a la anterior, cuyos miembros son los siguientes:

$$TC(t) * S * a(c)_{\mathbf{xo,m}} = r * S * (1+c)^{-m} * lx_o+m/lx_o * a(c)_{\mathbf{xo+n,w-xo-m}} \qquad \textbf{[10]}$$

Tenemos planteada la ecuación de equilibrio de reparto para el año "t", que en situación de estado relativamente estacionario es invariable para cada año. De ella podemos encontrar TC(t) la tasa de aporte que permite equilibrar los ingresos y egresos del sistema de reparto.

La tasa de aportes es constante respecto a "t" puesto que en ambos miembros no existe expresión dependiente de "t". Por lo tanto, en un régimen de estados relativamente estacionarios la tasa de aporte del sistema de reparto es invariable.

Resulta evidente que la nueva ecuación proporciona los mismos resultados respecto a TC(t) y /o "r", pero los valores absolutos de ambos miembros son diferentes a los de la ecuación original. No obstante, los principales resultados relativos de ambas ecuaciones **[9]** y **[10]** son idénticos.

Los de la ecuación **[10]** son los que utilizaremos puesto que a partir de ellos podemos comprobar la equivalencia con los de un sistema de capitalización individual.

Equivalencia entre la Ecuación de Equilibrio de un régimen de reparto con la formula de calculo de la tasa de aportes de un régimen de capitalización individual

Supongamos ahora que en un sistema de capitalización individual, deseamos establecer el nivel de la tasa de aportes (TC) aplicable a los salarios de cotización que permita financiar una renta vitalicia de un nivel equivalente al producto del último salario promedio de cotización por una tasa de remplazo prefijada que denotaremos por "r". Como no consideramos movilidad salarial vertical, el hecho de que el sueldo básico sea el promedio del último sueldo de actividad no es un supuesto muy importante.

La tasa de interés actuarial a aplicar es igual a la tasa de interés real "i(p) ", puesto que en la evolución de los salarios de cotización no consideramos su evolución por efecto de la inflación sino por influencia del crecimiento del salario real. Por lo tanto, los salarios de cotización tendrán la siguiente evolución $S * (1+s)^{(k-xo)}$, donde S es el salario a la edad de inicio de actividad "x_o" y "k" es la edad en la que calculamos el nivel salarial.

1) Valor Actual de las Primas de Aporte

El valor de los aportes VAP(k) esperados a la edad "x_o" a efectuarse a la edad "k" del cotizantes son iguales a:

$$VAP(k) = (TC * S *(1+s)^{(k-xo)}) * l_k / l_{xo} * (1+i(p))^{-(k-xo)}$$

Los tres factores más significativos tienen la siguiente justificación:

- " $TC * S *(1+s)^{(k-xo)}$ " es la cuota anual de aportes.
- "l_k/l_x" expresa la probabilidad de que la persona de edad "k" esté con vida, considerando que al inicio de la renta (edad x_o) lo estaba. Téngase presente que la cuota se verifica sólo en caso de vida de la persona afectada.
- "$(1+i(p))^{(xo-k)}$ " es el factor de actualización de la cuota a la edad x_o. Como la cuota se produce $k-x_o$ años después del inicio de la renta, la misma se debe calcular financieramente mediante la aplicación del factor de actualización v= 1/(1+i(p)) elevado a la cantidad de años que van desde x_o hasta k.

Si tomamos en cuenta la relación de tasas planteada en **[2]** podemos expresar a VAP(k) de la siguiente manera:

$$VAP(k) = (TC * S) * l_k / l_{xo} * (1+i(s))^{-(k-xo)} \qquad \textbf{[11]}$$

El valor de todas las primas VAP a la edad x_o se obtiene sumando la expresión anterior para k comprendido entre x_o y "x_o+m-1".

$k=x_o+m-1$

$$VAP = \underset{k=x_o}{\text{SUMA}} (TC * S) * l_k / l_{xo} * (1+i(s))^{-(k-xo)}$$

Que constituye el valor actual de una renta constante, por lo que de acuerdo con **[3]** podemos plantear el:

Valor Actual de las Primas de Aporte como:

$$VAP = TC*S* a(i(s))_{xo,m} \qquad \textbf{[12]}$$

.
Téngase presente que la tasa de interés que permitió efectuar el cálculo como si la renta fuera constante, ha sido la tasa i(s), pero en realidad la tasa global aplicable a toda la operación ha sido i(p) puesto que los salarios tienen un crecimiento en términos reales a la tasa s. Desde el punto de vista financiero es indiferente, puesto que ambas tasas de interés son equivalentes a través de la fórmula planteada en **[2]**.

2) Valor Actual de las prestaciones jubilatorias

El costo VAJ(k) de la prestación anual jubilatoria para una edad "k" dada, valorada a la edad de inicio de la actividad, puede ser calculado a partir de la expresión **[11]** cambiando TC por "r".

$$VAJ(k) = (r * S) * l_k / l_{xo} * (1+i(s))^{-(k-xo)}$$

Para toda edad $k >= x_o + m$

Por lo tanto, el costo VAJ de la renta vitalicia será igual a la siguiente suma:

$$VAJ = \underset{k=x_o+m}{\overset{k=w-1}{\text{SUMA}}} (r * S) * l_k / l_{xo} * (1+i(s))^{-(k-xo)}$$

Si efectuamos el cambio de variables : $j = k-x_o-m$, VAJ puede se expresado como:

$$VAJ = \underset{j=0}{\overset{j=w-1-x_o-m}{\text{SUMA}}} (r * S) * lx_o+m+j / l_{xo} * (1+i(s))^{-(m+j)} =$$

Realizando algunas manipulaciones algebraicas llegamos a:

$$VAJ = (r * S) *lx_o+m / lx_o * (1+i(s))^{-m} * \underset{j=0}{\overset{j=w-1-x_o-m}{\text{SUMA}}} lx_o+m+j / l_{xo+m} * (1+i(s))^{-j}$$

La expresión de la sumatoria que es equivalente a $a(i(s))_{\mathbf{xo+m,\ w-xo-m}}$ por la fórmula planteada en **[3],** de lo que resulta la siguiente expresión:

Valor actual del costo de la jubilación

$$VAJ = (r * S) * lx_o+m / lx_o * (1+i(s))^{-m} * a(i(s))_{xo+m,\ w-xo-m} \qquad \textbf{[13]}$$

3) Determinación de la tasa de aportes de equilibrio individual

El equilibrio actuarial del seguro individual considerado se obtiene igualando los valores actuales de los aportes y de las prestaciones, por lo que se debe cumplir que:

$$VAP = VAJ$$

Si desarrollamos ambas expresiones de acuerdo a **[11]** y **[13]**, resulta la siguiente expresión equivalente:

$$TC * S * a(s)_{xo,m} = (r * S) * lx_o+m / lx_o * (1+i(s))^{-m} * a(i(s))_{xo+m,\ w-xo-m} \qquad \textbf{[14]}$$

Si "r" fuera dado, puesto que estamos frente a un régimen de prestación definida (seguro individual), deberíamos despejar TC la tasa de aportes como variable de ajuste. Si por el contrario tuviéramos una aportación definida con TC dado, deberíamos hallar el valor de "r" para ajustar la ecuación de equilibrio individual.

Si comparamos la expresión **[14]** con la **[10]** que representa la ecuación de equilibrio del sistema de reparto reducida, podemos apreciar que son idénticas para el caso en que c=i(s), es decir, cuando la tasa de interés real sobre salarios sea igual a la tasa de crecimiento de los cotizantes.

Téngase presente que tanto el sistema de reparto como el de capitalización ante una tasa de aportes TC, permiten generar una jubilación con una tasa de remplazo "r", siempre que la tasa de interés real sobre salarios sea equivalente a la tasa de crecimiento de los cotizantes del sistema de reparto.

Por ello podemos decir que al sistema de reparto se le puede asociar una tasa de interés real sobre salarios implícita equivalente a la tasa de crecimiento demográfico del sistema.

Un ejemplo

A los efectos de poder facilitar la visualización de los resultados más importantes, planteamos un caso sencillo. Los supuestos que se plantean son muy simplificados, pero ayudan a mostrar una de las propiedades más importantes de un sistema de reparto en estado estacionario.
Características más importantes del caso a analizar:

- Edades de inicio de la actividad : entre 20-29 años
- Los activos aportan durante 40 años y luego se jubilan

- Los jubilados perciben una prestación jubilatoria durante 20 años
- Sueldo mensual por cotizante $ 5.000, constante en todo el período de proyección (no se considera inflación, ni crecimiento real de los salarios).
- Número inicial de cotizantes 1000 por cada decenio de edades entre 20 y 60 años.
(20-29; 30-39; 40-49 y 50-59)
- Número inicial de jubilados 1000 por cada decenio de edades entre 60 y 80 años.
(60-69; 70-79)
- Tasa decenal de crecimiento de las altas de cotizantes 5%
- Tasa de remplazo 60%

1) Resultados financieros globales del sistema de reparto

A continuación se muestran los principales efectos financieros del sistema sujeto a estudio, se presentan los resultados acumulados por períodos de diez años.

Evolución de la Masa Salarial

El siguiente cuadro muestra la evolución por tramos decenales tanto de edades como de años de proyección de la masa salarial.

Masa salarial de cotizantes (en millones de pesos)
Años

Edades	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80.
20-29	600	630	662	695	729	766	804	844
30-39	600	600	630	662	695	729	766	804
40-49	600	600	600	630	662	695	729	766
50-59	600	600	600	600	630	662	695	729
Totales	2.400	2.430	2.492	2.586	2.715	2.851	2.994	3.143
Crecimiento		1.2%	2.5%	3.8%	5%	5%	5%	5%

Se puede apreciar que para el primer decenio, en todos los tramos de edades las masa salarial es constante puesto que en cada una de ellas hay 1.000 cotizantes a un salario mensual igual de $ 5.000.

En el segundo decenio las primeras edades tienen una mayor masa salarial afectada como consecuencia del crecimiento (5%) del número de altas. En los decenios posteriores este crecimiento se va trasladando, llegando al decenio correspondiente a los años 41-50 donde el crecimiento alcanza a todos los niveles de cotizantes. En la última fila podemos apreciar que allí es donde es verifica el crecimiento total del 5% de la masa salarial por efecto del crecimiento en el mismo porcentaje de todos los niveles de cotizantes. A partir de ese decenio es que el régimen comienza a tener un crecimiento a tasa constante (5%), pues ha entrado en la madurez desde del punto de vista los cotizantes y se encuentra en lo que denominamos estado relativamente estacionario.

Evolución de los Egresos por Jubilaciones

El siguiente cuadro muestra la evolución por tramos decenales tanto de edades como de años de proyección de los egresos por jubilaciones.

Jubilaciones (en millones de pesos)
Años

Edades	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
60-69	360	360	360	360	360	378	397	417
70-79	360	360	360	360	360	360	378	397
Totales	720	720	720	720	720	738	775	814
Crecimiento		0%	0%	0%	0%	2.5%	5%	5%

En los cuatro primeros decenios, para todos los tramos de edades el importe es constante puesto que en cada uno hay 1000 jubilados a una jubilación mensual igual de $ 3.000 (60% de $5.000). Recién en el sexto decenio comienzan a jubilarse los cotizantes del segundo decenio de la proyección y en el séptimo, el sistema comienza a estacionalizarse la su tasa de crecimiento del sistema. En la última fila se aprecia el crecimiento decenal 5% de las prestaciones jubilatorias por efecto de crecimiento de los cotizantes de décadas anteriores. A partir del séptimo decenio el régimen comienza a tener un crecimiento a tasa constante (5%), pues ha entrado en la madurez desde del punto de vista de los jubilados.

Evolución de la Tasa de Aporte de Equilibrio

La tasa de aporte aplicable sobre la masa salarial permite equilibrar los ingresos con los egresos del sistema de acuerdo a la siguiente expresión:

(Tasa Aporte) * (Masa Salarial) = (Egresos por Jubilaciones)

En el siguiente cuadro se calculan las tasas para cada decenio, haciendo el cociente entre los valores de masa salariales y egresos por jubilaciones presentados en los dos cuadros analizados anteriormente.

Tasa de aporte de equilibrio
Años

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
30.00%	29.63%	28.90%	27.84%	26.52%	25.98%	25.88%	25.88%

El resultado más significativo, es que a partir del séptimo decenio la tasa comienza a estabilizarse por efecto de la madurez del sistema, especialmente por lo estacionario de las variaciones relativas tanto en la masa salarial como en las prestaciones por jubilaciones.

2) Resultados financieros individuales

A continuación se presenta los principales efectos financieros del sistema en el que se verifica el equilibrio individual entre los aportes y prestaciones de un afiliado, con 40 años de aportes (edad de inicio de la actividad 20 años) y 20 de jubilación (edad de inicio de la jubilación 60 años).

En este caso supondremos que la tasa de interés decenal aplicable es igual a la de expansión del sistema de reparto (5%), un sueldo mensual de $ 5000 y una tasa de remplazo del 60% aplicable al sueldo mensual para obtener la jubilación.

Valor Actual de las Cotizaciones a la tasa de aporte del 1%

El nivel de las cotizaciones puede determinarse aplicando la tasa de aportes a los sueldos vigentes en cada período.

Como la tasa de aportes no está determinada de antemano, calcularemos como primer paso el importe de las cotizaciones totales que resultaría de la aplicación de una tasa de aportes del 1%. En el cuadro siguiente se presentan los principales resultados.

Cotizaciones a una tasa del 1% sobre salarios decenales

Edades	Valores Corrientes	Valores Actualizados
20-29	6.000	6.000
30-39	6.000	5.714
40-49	6.000	5.442
50-59	6.000	5.183
	Totales	22.339

La columna de valores corrientes resulta de multiplicar la tasa del 1% a los sueldos de cada decenio (5000*12*10).

En la última columna se actualizan al primer decenio de edades los valores corrientes respectivos, aplicando la tasa de interés del 5%. Su suma representa el valor actualizado de las cotizaciones a una tasa del 1%.

Valor Actual de las Jubilaciones

Los niveles jubilatorios de cada decenio y su acumulación por totales figuran en el siguiente cuadro:

Importes de las jubilaciones a percibir por décadas

Edades	Valores corrientes	Valores actualizados
60-69	360.000	296.173
70-79	360.000	282.069
	Totales	578.242

La columna de valores corrientes resulta de multiplicar la tasa de remplazo del 60%a los sueldos de cada decenio (5000*12*10).

En la última columna, se actualizan al primer decenio de edades los valores corrientes respectivos, aplicando la tasa de interés del 5%.

Tasa de aportes de equilibrio.

Para la obtención de la tasa de aportes que equilibra los ingresos actualizados por aportes con las jubilaciones actualizadas, basta con realizar el siguiente cociente:

$$\text{Tasa de aporte} = \frac{\text{Valor actual Jubilaciones}}{\text{Valor actual Cotizaciones}} = \frac{578.242}{22.339} = 25.88\%$$

La principal característica de este resultado es que su nivel es exactamente el mismo que el obtenido para la tasa de aportes del sistema de reparto.

Mientras que en el sistema de equilibrio individual es fundamental en el cálculo la tasa de interés, en el de reparto es la tasa de expansión del sistema. En particular para este caso la expansión demográfica representada por la tasa de crecimiento de los cotizantes y de los jubilados. Pero lo más significativo, es que el nivel de ambas tasas es idéntico, por lo que podemos afirmar que la tasa de interés implícita del sistema de reparto es justamente la tasa de expansión del sistema.

Conclusiones

El análisis efectuado precedentemente es válido para sistemas de reparto cuyo crecimiento o expansión se verifica a una tasa constante. Este crecimiento se puede visualizar tanto a nivel de las variables físicas como a nivel de las monetarias. Cuando analizamos a las variables físicas del sistema estamos consideramos su crecimiento demográfico, el cual afecta de igual forma tanto a los cotizantes como a los jubilados puesto sus cambios relativos se verifican a tasa anual constante de aumento. Cuando consideramos las variables monetarias, debemos agregar al análisis el crecimiento salarial real en el horizonte de estudio, que en nuestro caso ha sido considerado constante, afectando por igual a los ingresos y los egresos. Por lo tanto, la expansión general del sistema viene dada por la tasa de crecimiento acumulado del número de afiliados y de los salarios reales.

Ante situaciones como la descrita, hemos demostrado que en el largo plazo el equilibrio financiero global de sistema **[9]** implica además el equilibrio financiero individual **[10]** de cada uno de los afiliados a partir de la consideración de una tasa de interés técnico actuarial anual real equivalente a la tasa de expansión del sistema. Por ello se puede afirmar que la tasa de interés implícita en el sistema de reparto es tal tasa de interés técnico.

Una justificación complementaria que se puede realizar respecto de la existencia de una tasa de interés asociada al sistema de reparto, la podemos visualizar a partir de consideraciones de carácter financiero. En tal sentido cabe establecer que el funcionamiento de un sistema de reparto, al no disponer de reservas, requiere de recursos provenientes de los aportes de los afiliados activos. Estos recursos recibidos de aportes de terceros, desde un punto de vista financiero, deben ser posteriormente cancelados conjuntamente con los intereses asociados al uso de esos fondos. Este repago capitalizado se computará a partir del cese de actividad de los afiliados a través del reintegro de los fondos por medio del otorgamiento de las prestaciones que el sistema otorga. Ello es posible porque el crecimiento del número de cotizantes - y por ende la masa salarial - genera recursos adicionales que permiten cumplir con las obligaciones contraídas con las generaciones anteriores. Como el nivel del crecimiento es a tasa constante, el sistema está en condiciones de "pagar" tasas de interés equivalentes desde un punto de vista financiero.

Por otra parte, la determinación de una tasa de interés implícita para el sistema, permite realizar dos tipos de evaluaciones:

1. En primer lugar, analizar desde un punto de vista actuarial si resulta más conveniente para los afiliados un régimen de capitalización a uno de reparto o viceversa mediante la comparación de las tasas de interés técnico que se esperan obtener en cada uno de los sistemas. Si la tasa de interés implícito esperada del régimen de reparto es mayor a la de capitalización individual será aquel más conveniente, dando lugar a lo que se conoce como Paradoja del Sistema de Reparto[3]. Si la tasa de interés en el régimen de capitalización es superior, es de esperar que esta permita generar mayores niveles jubilatorios.

2. En segundo lugar, la tasa implícita permite evaluar si un régimen de reparto está adecuadamente estructurado en la relación tasa de aportes – tasa de remplazo. Es posible que en el régimen de reparto con prestación definida los niveles jubilatorios estén fijados en forma arbitraria, sin que exista un equilibrio actuarial entre cotizaciones y prestaciones. A partir del conocimiento de la tasa de interés implícito será posible establecer concretamente los desvíos que se puedan dar para las diferentes edades de retiro posibles.

En última instancia, las jubilaciones de un sistema de reparto dependen de la tasa de interés implícita en el mismo y que ésta es igual a la de su expansión global. Por lo tanto se puede afirmar que el nivel de las jubilaciones varía en forma proporcional a crecimiento global del régimen, por cuanto a mayor expansión del sistema, mayores serán las tasas de remplazo que se puedan otorgar por efecto de las tasas de interés implícitas.

[3] La Paradoja del Sistema de Reparto.Luis Camacho. B.P-S: Indicadores de la Seguridad No.107.