

**EXPLICITACION DE LAS VARIABLES QUE INCIDEN EN
EL EQUILIBRIO FINANCIERO INDIVIDUAL DE UN
SISTEMA JUBILATORIO CON PRESTACION DEFINIDA**

Cr. Luis Camacho

EXPLICITACION DE LAS VARIABLES QUE INCIDEN EN EL EQUILIBRIO FINANCIERO INDIVIDUAL DE UN SISTEMA JUBILATORIO CON PRESTACION DEFINIDA

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este análisis es el de rediseñar las formulaciones actuariales asociadas a las rentas tanto a las cotizaciones como las prestaciones, en un sistema en que la variable de ajuste es la tasa de contribución, de forma de que se pueda visualizar claramente las variables que inciden específicamente en el equilibrio individual del régimen jubilatorio.

Entre estas variables destacamos los tiempos medios de cotización y de jubilación, los sueldos promedios de cotización y de jubilación, y las tasas de contribución y de remplazo del sistema. La particularidad de este enfoque es que nos permitirá definir adicionalmente las edades centrales de cotización y de jubilación.

Para la definición de tales variables es preciso realizar una serie de planteos y estimaciones aplicando conceptos generales de cálculo financiero y actuarial, basándonos en una serie de hipótesis generales que rigen el sistema bajo consideración.

El sistema jubilatorio del que evaluaremos el nivel de la tasa de contribución de equilibrio entre ingresos y prestaciones, presenta las siguientes características:

- Hay una única edad de inicio de actividad que denotamos con "ei"
- Durante el período de actividad sólo se producen bajas por fallecimiento.
- Hay una única edad de jubilación que denotamos por "er", la que se sirve hasta la edad "ef".
- Las contribuciones y prestaciones se efectivizan a principio de cada unidad de tiempo¹.
- El sistema jubilatorio bajo consideración es de prestación definida por lo que la tasa de remplazo está fijada mientras que la variable de ajuste es la tasa de contribución sobre los salarios computables.

A continuación procederemos a plantear las diferentes formulaciones, en primer término para las cotizaciones y luego para las jubilaciones, en las que

¹ En sentido estricto, la unidad de tiempo debe ser el mes puesto que tanto las cotizaciones como las jubilaciones se efectivizan por lo general en forma mensual. Para realizar el análisis con este tipo de unidad de tiempo es necesario disponer de una tabla de mortalidad con apertura mensual. Para realizar tal apertura se puede consultar "Algoritmo para la apertura mensual de la tabla de Mortalidad – Luis Camacho – Comentarios de Seguridad Social – Mayo de 2005". En caso de realizar el análisis más simplificado donde los intervalos de tiempo sean anuales, es necesario acumular los pagos y cobros mensuales a principio cada año.

iremos introduciendo las diversas variables generales establecidas precedentemente.

VALOR ACTUALIZADO DE LAS COTIZACIONES POR EDAD

En el caso sujeto a análisis las contribuciones a realizar durante la vida activa se efectivizan periódicamente desde el inicio de actividad hasta una unidad de tiempo anterior a la edad de retiro, siempre que el afiliado esté con vida en cada instante en que se debe realizar la contribución.

Para la consolidación de todas las contribuciones es necesario calcular el valor financiero de esos aportes a la edad de inicio de la actividad mediante la aplicación de factores de actualización.

En la formulación general del valor actual se deben considerar los siguientes cuatro tipos de factores por edad :

1) SUELDO POR EDAD

Si suponemos un sueldo a la edad inicial de S_{e_i} y que este sueldo crece por efecto de la movilidad salarial vertical producto de las promociones y ascensos que se puedan verificar durante la vida activa del cotizante que denotamos, para el período comprendido entre las edades "e_i" y "j", por la tasa de crecimiento "m(e_i,j)". Crece además, por efecto de cambios en la productividad general, sin embargo este crecimiento lo obviamos puesto que trabajaremos valores monetarios constantes en términos de salarios. Por lo tanto, el sueldo promedio a una edad "j" cualquiera comprendida entre la edad de inicio y la edad de retiro, será igual a:

$$S_j = S_{e_i} * (1+m(e_i,j)) \text{ para } e_{r-1} \geq j \geq e_i \quad [1]$$

Si se hubiera incluido en el análisis los sueldos en valores corrientes, sería necesario multiplicar a los S_{e_i} por el crecimiento salarial general. Si este creciera a una tasa de "s" anual constante, el factor adicional a considerar sería igual a $(1+s)^{j-e_i}$.

2) TASA DE CONTRIBUCIÓN INDIVIDUAL (TCI)

Los aportes efectivos por edad se determinan multiplicando la tasa de contribución por los salarios de la edad, por lo que se verifica:

$$\text{Cotización Efectiva a la edad } j = S_j * \text{TCI} \quad \text{para } e_{r-1} \geq j \geq e_i$$

Como los cálculos se deben realizar a partir de la edad "e_i", no se tiene la certeza de que el cotizante llegue a generar una jubilación a consecuencia de que puede fallecer en el período de actividad. En tal sentido, debe tenerse presente que la cotización efectiva sólo es válida en el caso de que el esté

con vida en ese momento. Como la valoración de esta cotización debe ser realizada desde la perspectiva de la edad de inicio de la actividad, se puede presentar la posibilidad de que esa cotización no se efectivice por fallecimiento del cotizante.

3) PROBABILIDAD DE SOBREVIVENCIA

Para incluir el riesgo de muerte en el análisis, debemos considerar una función adicional que la definimos a partir de las funciones de supervivencia $\{l_x\}$ asociadas a la tabla de vida aplicable al cotizante sujeto a análisis. Es de destacar que $\{l_x\}$ indica el número de sobrevivientes a la edad exacta x , de un número inicial de por ejemplo 100 000 a la edad 0. La tabla decrece por una sola razón, que es la muerte. Para el presente análisis sabemos que la persona llegó con vida a la edad " e_i ", para las restantes edades debemos utilizar la probabilidad de llegue con vida a esas edades. Tal probabilidad puede ser planteada de la siguiente manera;

Probabilidad de llegar a la edad j desde $e_i = l_j / l_{e_i}$ para $j \geq e_i$
[2]

Donde " l_j " es el número de sobrevivientes de a la edad " j " habiendo partido de un número de personas " l_{e_i} " que viven a la edad " e_i ". Tal cociente indica la probabilidad de una persona de edad " e_i " llegue con vida a la edad " j ". Resulta evidente que la probabilidad para " $j=e_i$ " debe ser igual a uno.

Podemos ahora calcular las cotizaciones esperadas a la edad " j " para lo que se aplica la siguiente expresión:

Cotización Esperada a la edad $j = CE_j = S_j * TCI * l_j / l_{e_i}$
[3]

Que es el promedio entre la cotización efectiva cuando el cotizantes llega con vida a " j " y con la cotización cero en caso de fallecimiento anterior.

4) FACTOR DE ACTUALIZACIÓN DE LAS COTIZACIONES

Como las cotizaciones anuales se verifican en diferentes períodos, es preciso valorarlas en un instante común, que en este caso consideramos como el más conveniente el asociado a la cotización a la edad inicial. En tal caso el factor tendrá la siguiente expresión:

Factor de Actualización a la edad e_i de la cotización a la edad $j = (1 + i_s)^{j+e_i}$

donde " i_s " es la tasa de interés real sobre salarios vigente en todo el horizonte de análisis. Si se supone constante, serán también invariables las

siguientes dos tasas que son las que permiten calcular a “ i_s ” de la siguiente forma:

$$(1 + i_s) = (1+i) / (1+s)$$

donde la “ i ” es la tasa de interés nominal aplicable a inversiones en pesos corrientes y “ s ” es la tasa de crecimiento salarial en la unidad de tiempo.

Aplicando el factor de actualización a la cotización esperada obtenemos el valor de esa cotización a la edad “ e_i ”, de la siguiente forma:

$$\text{Valor a la edad } e_i \text{ de la cotización esperada de la edad } j = CE_j \cdot (1 + i_s)^{-j+e_i} \quad [4]$$

Esta expresión es válida para todas las edades comprendidas entre la de inicio de la actividad y la de retiro.

VALOR ACTUAL DE LAS COTIZACIONES TOTALES

Para estimar las cotizaciones totales actualizadas basta con sumar todas los aportes por edad actualizados, de la siguiente forma:

$$VAC = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} [CE_j \cdot (1 + i_s)^{-j+e_i}] \quad [5]$$

Sin embargo, a los efectos de visualizar más claramente los componentes que inciden directamente en el nivel de las cotizaciones, definiremos seguidamente los siguientes factores: Edad Central de Cotización, Sueldo Medio de Cotización y Tiempo Medio de Cotización:

1) EDAD CENTRAL DE COTIZACIÓN (ECC)

Podemos considerar el caso hipotético de que todas esas Contribuciones Esperadas por edad se puedan pagar conjuntamente a una edad intermedia entre “ e_i ” y “ e_{r-1} ” que denominamos Edad Centro de Cotización (ECC), de tal forma que desde el punto de vista financiero fuese equivalente a la operación real de pagos periódicos y sucesivos hasta la edad de retiro.

En esta situación, el valor de las contribuciones totales a obtener es el siguiente:

$$VAC = \left[\sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} CE_j \right] \cdot (1+i_s)^{(e_i-ECC)} \quad [6]$$

donde ECC es la edad en la que se cumple la equivalencia entre las expresiones [5] y [6]

Por lo tanto, la Edad Central de Cotizaciones (ECC) es la edad en la que desde un punto de vista financiero podría haberse pagado la totalidad de las cotizaciones con igual resultado que el pago periódico de los aportes.

2) TIEMPO MEDIO DE COTIZACIÓN (TMC)

Definimos al Tiempo Medio de Cotización, como la suma de las probabilidades de supervivencia durante el período de actividad de tal forma que:

$$TMC = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} l_j / l_{e_i} \quad [7]$$

Esta formulación se puede conceptualizar más adecuadamente si se tiene en cuenta que la esperanza de vida a la edad "e_i" es la siguiente²:

$$\text{Esperanza de Vida a la edad } e_i = \sum_{J=e_i}^{J=e_f} [l_j / l_{e_i}]$$

La que podemos descomponer en dos sumandos específicos de la siguiente forma:

$$\text{Esperanza de Vida a la edad } e_i = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} l_j / l_{e_i} + \sum_{j=e_r}^{j=e_f} l_j / l_{e_i} \quad [8]$$

Desde la perspectiva de la edad de inicio de la actividad, el primer sumando representa tiempo esperado de sobrevivencia que se obtendría en el período de cotización y el segundo el tiempo esperado de sobrevivencia en el período de jubilación. En nuestra definición, el primer sumando es el Tiempo Medio de Cotización (TMC), mientras que el segundo sumando el Tiempo Medio de Jubilación (TMJ) que consideraremos más adelante.

3) SUELDO MEDIO DE COTIZACIÓN (SMC)

En lugar de trabajar con sueldos anuales diferentes para cada edad, es posible considerar en el análisis un sueldo promedio por unidad de tiempo, constante para todos los períodos de cotización esperados. Ello es posible si definimos el Sueldo Medio de Cotización como sigue:

² Actuarial mathematics of social security pensions. Subramaniam Iyer. Quantitative methods in social Protection Series. International Labour Office.

$$[9] \quad \text{SMC} = \frac{\sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} \text{CE}_j}{\text{TMC}}$$

Es de destacar que la suma de cotizaciones esperadas de todo el período se divide entre el Tiempo Medio de Cotización por lo que el sueldo medio resultante está referido a cada una de las unidades de tiempo que integran dicho tiempo medio.

Por otra parte, de la expresión anterior podemos deducir que es válida la siguiente relación:

$$\text{SMC} * \text{TMC} = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} \text{CE}_{e_i+j} \quad [10]$$

Por lo tanto, si tenemos en cuenta las definiciones realizadas anteriormente [6] y [10], podemos expresar el valor actualizado de las cotizaciones totales a la edad de inicio de la actividad, como:

$$\boxed{\text{VAC} = \text{TMC} * \text{SMC} * \text{TCI} * (1+i_s)^{(e_i-\text{ECC})}} \quad [11]$$

Como síntesis podemos establecer que los aportes totales pueden ser calculados aplicando la tasa de contribuciones (TCI), a la masa salarial total de cotizantes, que a su vez puede ser estimada multiplicando el sueldo promedio de cotización (SMC) por la cantidad de unidades de tiempo de cotización esperada (TMC). Su valoración a la edad de inicio de la cotización se realiza aplicando la edad central de cotización (ECC).

Realizando una pequeña transformación de la expresión [11] podemos presentar el valor actual de las cotizaciones a la edad cero en lugar de a la edad "e_i". Para ello multiplicamos ambos miembros por el factor de actualización $(1+i_s)^{-e_i}$

$$[12] \quad \boxed{\text{VAC} * (1+i_s)^{-e_i} = \text{TMC} * \text{SMC} * \text{TCI} * (1+i_s)^{-\text{ECC}}}$$

El segundo miembro de la expresión anterior, permite realizar los cálculos en forma más general porque la edad a la que se actualiza los flujos de fondos es invariable cualquiera sea la edad de inicio de la actividad que estemos considerando.

A continuación plantearemos un ejemplo simple en el cual consideramos sólo tramos decenales de edad, que nos permitirá visualizar los diferentes factores intervinientes en el cálculo de las cotizaciones .

Las características del caso a analizar son las siguientes:

- La edad de inicio de la actividad 20 años y retiro 70.

El sueldo mensual inicial es de 60.000, que crece anual por efecto de los ascensos y promociones (movilidad vertical) resultando los niveles que figuran en la columna II del cuadro I.

la probabilidad de supervivencia, calculada a partir de la edad de 20 años, se muestra en la columna III del cuadro I.

La tasa de interés real sobre la evolución salarial es del 20% decenal. La tasa de contribución es del 10%, sobre los salarios computables.

Cuadro I - Computo de los Valores Actuales de Cotización

I Edad	II 60000* (1+m(20,j))	III l _j / l _e i	IV (1+i(s)) ^{-j+ei}	V producto I Producto II II*III*IV	VI II*III
20	60000	1	1	60000	60000
30	72000	0.9	0.8333	54000	64800
40	78000	0.8	0.6944	43333	62400
50	84000	0.7	0.5787	34028	58800
60	90000	0.6	0.4822	26042	54000
SUMAS		4.0		217403	300000

En las últimas filas del cuadro se pueden visualizar los totales acumulados de las diferentes columnas, pero interesa en particular considerar los guarismos asociados las sumas de la columna III , columna V y columna VI, que están asociados a las siguientes expresiones genéricas:

$$\text{Suma Columna III} = \sum_{j=2}^{j=6} (l_j/l_2) = 4$$

$$\text{Suma Columna V} = \sum_{j=2}^{j=6} 60000 * (1 + m(2,j)) * (l_j/l_2) * [(1+i(s))^{-j+2}] = 217 403$$

$$\text{Suma Columna VI} = \sum_{j=2}^{j=6} 60000 * (1 + m(2,j)) * (l_j/l_2) = 300 000$$

Tener presente que la unidad de tiempo es la década por lo que las edades “j” debe ser expresadas en tal dimensión.

Con los resultados finales del cuadro podemos estimar el valor de todas las variables relevantes.

En primer término calcularemos la Edad Central de Cotización. Para ello tengamos en cuenta que se cumple que:

$$1/(1+0.20)^{ECC-2} = \text{Suma Columna V} / \text{Suma Columna VI} = 0.724675926.$$

Despejando, ECC de la expresión anterior llegamos al siguiente valor: 3.766 décadas. Podemos afirmar entonces que es posible realizar una contribución de todos los aportes de una sola vez a los 37.66 años de edad con idénticos resultados que el hacerlo en aportes parciales al inicio de cada década.

Por otra parte, el Sueldo Medio de Cotización, es igual a:

$$\text{SMC} = \text{Suma Columna VI} / \text{Suma Columna III} = 75000$$

El tiempo medio de cotización es de:

$$\text{TMC} = \text{Suma Columna III} = 4 \text{ décadas}$$

El tiempo medio de cotización nos indica la cantidad de décadas que en promedio existirán cotizaciones, teniendo en cuenta que a consecuencia de la mortalidad es posible el fallecimiento prematuro del titular. En el ejemplo existen cinco edades exactas en los que es posible realizar las cotizaciones que van desde los 20 a los 60 años de edad. El Tiempo Medio de Cotización indica que es de esperar que en promedio existan sólo 4 década de cotización, una menos que las que deberían existir para que el cotizante comenzase a recibir su jubilación.

Como se había establecido anteriormente, los 75 000 de sueldo medio de cotización por década se refieren a las 4 décadas esperadas de cotización en lugar de las 5 totales previstas para general jubilación.

Por último, considerando que en este caso la tasa de Cotización es del 10% y aplicando la fórmula [11] el valor actualizado de las cotizaciones a la edad 20 será igual a:

$$\text{VAC} = \frac{75\,000 * 4 * 0.10}{(1,2)^{3.766-2}} = 21\,740.3$$

Se puede apreciar que el resultado es el mismo que se obtendría aplicando la tasa de aportes del 10% a la suma de la Columna V del cuadro. En realidad este resultados se dará siempre puesto que la suma de la columna V es, aplicando las fórmulas actuariales clásicas de rentas contingentes, el valor actualizado de las contribuciones cuando la tasa de aporte es del 100%,.

Con la aplicación de las fórmulas anteriores disponemos de la desagregación de los componentes de las cotizaciones, y se puede analizar la incidencia de cada una de las variables intervinientes, en especial las económicas a través del Sueldo Medio de Cotización, las demográficas

mediante el tiempo medio de cotización y las financieras a través de la Edad Central de cotización y la tasa de interés aplicable.

VALOR ACTUAL DE LAS PRESTACIONES POR EDAD

Similares conceptos a los realizados en relación a las cotizaciones podemos establecer ahora, en especial respecto a las probabilidades de supervivencia y al factor de actualización de los flujos de fondos a la edad de inicio de la actividad. La diferencia sustancial se da en que la prestación se comienza a servir a partir de la edad "e_r" a nivel equivalente al producto de la tasa de remplazo (TR) del sistema por el sueldo medio básico jubilatorio SBJ, por lo cual se cumple.

Jubilación Inicial a la edad e_r = SBJ * TR

El sueldo básico jubilatorio se puede calcular como un promedio de sueldos de cotización. El número de sueldos a promediar pueden ir desde uno hasta los correspondientes a toda la vida laboral. Además, para hacerlos comparables en el promedio, suele ser utilizado un índice que puede ir desde el correspondiente a los salarios como al de precios. Inclusive se presentan casos en que los sueldos se promedian sin actualización. En el presente análisis suponemos que el Sueldo Básico Jubilatorio es una variable que viene dada por lo que no interesa considerar las diversas alternativas posibles para su obtención.

En cuanto a la tasa de remplazo (TR), está predeterminada porque el sistema que estamos considerando es de prestación definida, por lo cual será constante y representa el porcentaje del Sueldo Básico Jubilatorio que se obtendría como jubilación inicial. A esta tasa se le denomina asimismo tasa de sustitución.

Para los siguientes años, la jubilación inicial se debe reajustar, en función de una tasa "a" de crecimiento que puede ser igual a la de crecimiento de precios, la de salarios o una combinación de ambas. Si suponemos que esta tasa es constante en todo el período de análisis, podemos plantear:

Jubilación Nominal a la edad j = SBJ * TR * (1+a)^(j-er)

Como el análisis se realiza en valores constantes en términos de salarios, en necesarios deflactar la jubilación nominal por la variación del índice de salarios "s", de la siguientes forma:

Jubilación Real a la edad j=JRj = SBJ * TR * (1+a)^(j-er) / (1+s)^(j-er) [13]

Resulta evidente que si las jubilaciones se revalorizan de acuerdo al crecimiento del índice general de salarios, la Jubilación Real de cada año es igual al Sueldo Básico por la Tasa de Remplazo (JRj=SBJ*TR), por lo que la jubilación sería constante en términos reales de salarios.

Ahora estamos en condiciones de calcular el valor actualizado de las jubilación esperada a la edad j , aplicando las probabilidades de supervivencia y el factor de actualización de igual forma que para las cotizaciones. En este caso el resultado será igual a :

Valor a la e_j de la jubilación esperado de la edad $j = JR_j * l_j / l_{e_j} * (1+i_s)^{(e_j-j)}$
[14]

La actualización de las prestaciones de todos los años la realizamos a la edad de inicio de la actividad a los efectos de poder compararlas con las cotizaciones que está actualizadas al mismo instante.

VALOR ACTUAL DE LAS PRESTACIONES TOTALES

Las jubilaciones totales actualizadas se obtienen acumulando las jubilaciones por edad de la siguiente forma:

$$VAJ = \sum_{j=e_f}^{e_r} [JR_j * l_j / l_{e_j} * (1+i_s)^{(e_j-j)}] \quad [15]$$

Al igual que para las cotizaciones, realizaremos seguidamente una serie de definiciones adicionales respecto a tres factores significativos.

1) EDAD CENTRAL DE JUBILACIÓN (ECJ)

Al igual que para las contribuciones, podemos plantearnos una situación hipotética en que la totalidad de las jubilaciones se paguen en un instante en la vida de la persona, que denominamos Edad Central de Jubilación que tenga idéntico efecto financiero que el cobro periódico de las mismas tal cual es el régimen real. En ese caso, el valor actualizado de las jubilaciones tendría la siguiente expresión:

$$VAJ = \left[\sum_{j=e_f}^{e_r} JR_j * l_j / l_{e_j} \right] * (1+i_s)^{(e_j-ECJ)} \quad [16]$$

donde ECJ es la edad en la que se cumple la equivalencia entre los resultados de las expresiones [15] y [16].

2) TIEMPO MEDIO DE JUBILACIÓN (TMJ)

De acuerdo al análisis efectuado respecto al Tiempo Medio de Cotización, podemos plantear al Tiempo Medio de Jubilación como :

$$TMJ = \sum_{j=e_r}^{j=e_f} (I_j / I_{e_i}) \quad [17]$$

Resulta de suma importancia tener presente que el Tiempo Medio de Jubilación (TMJ) no representa la esperanza de vida a la edad de retiro donde se visualizan los años restantes esperados a partir de haber obtenido una jubilación, o lo que en este caso es lo mismo que haber llegado con vida a la edad “e_r”. En nuestro análisis siempre estamos ubicados a la edad de inicio de la actividad, por lo que debe ser visualizado desde la perspectiva de la edad “e_j”, desde donde estimamos el número de años medios que se esperan percibir jubilaciones.

3) SUELDO MEDIO BASICO JUBILATORIO (SMBJ)

En lugar de considerar sueldos básicos jubilatorios cambiantes por edad, por efecto de las revalorizaciones periódicas que producen, podemos considerar un sueldo básico jubilatorio de nivel promedio por unidad de tiempo. Ese promedio lo referiremos a las unidades de tiempo del Tiempo medio jubilatorio, por lo que la expresión para SMBJ será la siguiente:

$$SMBJ = \frac{\sum_{j=e_r}^{j=e_f} JR_j * I_j / I_{e_i}}{TR * TMJ} \quad [18]$$

Un caso particular que es de importancia se presenta cuando consideramos:

que el Sueldo Básico Jubilatorio (SBJ) se computa como el promedio de los sueldos de toda la vida laboral, actualizados por la evolución del índice general de salarios.

En tal caso el sueldo básico jubilatorio (SBJ) sería igual al Sueldo Medio de Cotización por lo que se cumple :

$$SBJ = SMC$$

que además las jubilaciones se reajustan también con tal variación salarial general.

Como hemos establecido anteriormente, en este caso se cumple :

$$JR_j = SBJ * TR \quad \text{para } j \geq e_r$$

Por lo tanto, el sueldo medio básico jubilatorio en este caso sería igual a:

$$[19] \quad \text{SMBJ} = \frac{\sum_{j=e_f}^{j=e_r} \text{SMC} * \text{TR} * (l_j / l_{e_i})}{\text{TR} * \text{TMC}} = \text{SMC}$$

Por lo tanto, en el caso considerado, el Sueldo medio básico jubilatorio es igual al Sueldo Medio de Cotización.

En base a las definiciones y análisis precedentes, en particular por [16] y [19], podemos expresar el valor actualizado de las jubilaciones a la edad cero, como:

$$[20] \quad \text{VAJ} = \text{TMJ} * \text{SMBJ} * \text{TR} * (1+i_s)^{e_i - ECJ}$$

Por lo tanto el valor actualizado de las prestaciones jubilatorias es igual a la actualización desde la edad central de jubilación del producto del Tiempo Medio de Jubilación (TMJ) por el Sueldo medio básico jubilación (SMBJ) y la tasa de remplazo (TR).

Si el valor de las jubilaciones se actualiza a la edad cero en lugar de la edad e_i , debemos multiplicar ambos miembros de la relación anterior por el factor $(1+i(s))^{e_i - ECJ}$, obteniendo el siguiente resultado:

$$[21] \quad \text{VAJ} * (1+i_s)^{-e_i} = \text{TMJ} * \text{SMBJ} * \text{TR} * (1+i_s)^{-ECJ}$$

Por lo tanto, el valor de una jubilación al origen puede ser obtenido por el producto de un sueldo medio básico jubilatorio, calculado a partir de los sueldos de cotización, por la tasa de remplazo aplicable y por la cantidad de unidades de tiempo que se prevé que se cobrará la jubilación, desde una perspectiva de la edad de inicio de cotización " e_i ." El resultado anterior debe ser descontado por el factor de actualización en el que tienen especial incidencia la tasa de interés real sobre salarios y la edad central de jubilación.

A los efectos de visualizar los principales resultados, continuaremos analizando el ejemplo de la sección anterior, con el agregado de que suponemos que el sueldo básico jubilatorio se obtiene promediando los sueldos de toda la vida laboral actualizados por la variación del índice general de salarios, este índice también sirve para revalorizar las jubilaciones en curso de pagos. Además suponemos que la tasa de remplazo a aplicar sobre

el sueldo básico jubilatorio es del 60%. En el cuadro figuran las probabilidades de supervivencia para las edades jubilatorias.

En el siguiente cuadro tenemos los datos más importantes para el cálculo del costo de la jubilación:

Cuadro II - Computo de los Valores Actuales de Jubilación

Edad	l_j / l_{ei}	$(1+i(s))^{-j+ei}$	producto I II*III
I	II	III	IV
70	0.5	0.40188	0.20
80	0.4	0.33490	0.13
90	0.1	0.27908	0.03
Sumas	1		0.36

En la segunda columna tenemos las probabilidades de supervivencia, calculadas a partir de la edad de inicio de la actividad (20 años). En la tercera, los factores de actualización de los flujos de fondos a la edad de inicio de la actividad. La cuarta es el producto de las dos anteriores. En la última fila encontramos la suma de las columnas II y IV que están asociados a las siguientes expresiones genéricas:

$$\text{Suma Columna II} = \sum_{j=7}^{j=9} (l_j / l_{ei}) = 1 \text{ década}$$

$$\text{Suma Columna IV} = \sum_{j=7}^{j=9} (l_j / l_{ei}) \cdot [1 / (1+i_s)^{(2-j)}] = 0.36$$

Con estos resultados podemos estimar el valor de todas las variables relevantes.

En primer término calcularemos la Edad Central de Jubilación. Para ello tengamos en cuenta que se cumple que:

$$1 / (1+0.2)^{ECJ-2} = \text{Total 2} / \text{Total 1} = 0.36.$$

Despejando, ECJ de la expresión anterior llegamos al siguiente valor: 7.56 décadas, que significa que la edad central en la que es equivalente hacer un pago único a los 75.6 años.

Por otra parte, el Sueldo Medio Básico de Jubilación es igual al de Cotización por la forma de actualización de los salarios y pasividades y porque se promedian los sueldos de toda la vida laboral, por lo que:

$$\text{SMBJ} = \text{SMC} = 75\,000$$

Los años medios de jubilación son:

$$AMJ = \text{Suma Columna II} = \underline{1 \text{ década}}$$

Entonces, considerando que en este caso la tasa de remplazo es del 60% y aplicando la fórmula del valor actualizado de las jubilaciones será igual a:

$$\underline{VAJ} = \frac{75\,000 * 0.6 * 1}{(1,2)^{7.56-2}} = \underline{16326.28}$$

Ello significa que la jubilación promedio anual sería igual a 45000 (75000*0.6) que en promedio, se cobraría durante 10 años, si lo miramos desde la perspectiva de la edad de inicio de la actividad. El importe total de las jubilaciones actualizado a esa edad es igual a 16326.28 pesos.

TASA DE APORTE DE EQUILIBRIO INDIVIDUAL

El equilibrio financiero individual se da cuando se cumpla la igualdad de los valores actualizados de las cotizaciones [12] y de la jubilaciones [21], por lo que debe en ese caso verificarse:

$$TMC * SMC * TCI * (1+i_s)^{-ECC} = TMJ * SMBJ * TR * (1+i_s)^{-ECJ}$$

Como estamos considerando un sistema de prestaciones definidas, la variable de ajuste será la Tasa de Contribución, por lo que corresponde que despejemos TC I de la expresión anterior, resultando:

$$TCI = \frac{SMBJ * TR}{SMC} * \frac{TMJ}{TMC} * (1+i_s)^{(ECC-ECJ)} \quad [22]$$

La tasa de cotización de equilibrio depende de una relación económica entre el nivel de la jubilación promedio y el sueldo medio de actividad, una relación demográfica entre los años medios de jubilación y años medios de cotización y un factor financiero en el que inciden tanto la tasa de interés real sobre salarios considerada en el análisis así como la diferencia entre los años medios de jubilación y los de cotización, que representa el período en el que se recuperarían en promedio los aportes.

Es interesante comparar estos resultados con los que presentan en el equilibrio financiero de un sistema de reparto. En tales sistemas el equilibrio anual se verifica a través de la siguiente ecuación (sin considerar gastos de administración):

$$TCR = \frac{JUB\$}{COT\$} * \frac{JUBN}{COTN}$$

Donde :

TCR = Tasa de contribución de equilibrio de un sistema de reparto
JUB\$ =Jubilación promedio
COT\$ =Sueldo medio de Cotización
JUBN =Jubilaciones totales
COTN =Cotizantes totales

Las diferencias se presentan sólo en las relaciones demográficas, puesto que en reparto ésta relaciona el número de jubilaciones con el de cotizaciones, mientras que en el equilibrio individual se relacionan años medios de jubilación con los de cotización. Además, en el equilibrio individual figura un factor adicional financiero de actualización, que no aparece en la ecuación del régimen de reparto.

Volviendo con el ejemplo sujeto a análisis, si comparamos los resultados de las actualizaciones de las cotizaciones y prestaciones, vemos que hay diferencias entre ambos resultados ya que:

$$\underline{VAC} = \underline{21740.28} \quad \text{y} \quad \underline{VAJ} = \underline{16326.28}$$

Esta diferencia se debe a que se realizó el análisis en forma independiente para las cotizaciones y para las jubilaciones sin tener en cuenta el necesario equilibrio final. Como en este caso, la variable de ajuste es la tasa de contribuciones, la tasa del 10% considerada debe ser ajustada de forma que el valor de las contribuciones alcance al nivel de las jubilaciones.

Este ajuste es muy sencillo porque bastaría, de realizar el cociente entre VAJ y VAC y aplicarlo a la tasa del 10%, para obtener la tasa de equilibrio final.

$$\underline{TC} = \underline{16326.28/21740.28 * 0.10} = \underline{0.075}$$

Por lo tanto, la tasa de contribución de equilibrio individual para el caso considerado sería igual a 7.50% en lugar del 10% planteado originalmente.

Se puede llegar a idéntico resultado si se aplica la fórmula

$$TC = \frac{75000 * 0.6}{75000} * \frac{1}{4} * 1.2^{-3.7947} = 0.075$$

En este caso como el sueldo medio de cotización y el básico jubilatorio son iguales, desde un punto de vista económico tiene incidencia sólo la Tasa de Reemplazo para la fijación de la tasa de contribución, además de los años medios de jubilación y de cotización que tienen una relación de una década de jubilación por cada 4 décadas de cotización. Tiene una importante incidencia el factor financiero ya que como el período de recuperación es más de 37.9 años, alcanza un valor aproximado a 0.5 en la determinación de la tasa de cotización.

SENSIBILIDAD DE LA TASA DE CONTRIBUCIÓN ANTE CAMBIOS EN LAS TASAS DE MORTALIDAD

Limitaremos nuestro análisis a dos tipos de variaciones posibles en las tasas de mortalidad, luego de calculada la tasa de aporte de equilibrio individual en el caso en que el Sueldo Básico Jubilatorio se calcule como el promedio actualizado por la evolución del índice de salarios de toda la vida activa y que las jubilaciones se revaloricen de acuerdo a la evolución de los salarios.

Esta limitación la establecemos como consecuencia de que para la consideración de las distintas alternativas de cálculo del SBJ y de las jubilaciones, es preciso realizar un análisis más específico del que efectuaremos en esta oportunidad.

En el caso sujeto a análisis la tasa de contribución de equilibrio individual, es la siguiente puesto que el Sueldo Medio de Cotización (SMC) es igual al Sueldo Medio Básico Jubilatorio (SMBJ):

$$TCI = TR * \frac{TMJ}{TMC} * (1+i_s)^{(ECC-ECJ)}$$

Bajo tales supuestos, consideraremos dos situaciones diferentes:

Que las probabilidades de supervivencia anuales, crecen para todas las edades en un mismo porcentaje.

Previamente, definimos a la probabilidad de supervivencia para un año específico "j", como uno menos la tasa de mortalidad de ese año.

Por definición de l_j , se cumple entonces que: $l_j = l_{j-1} P_{j-1}$ lo que lleva al siguiente resultado:

$$l_j = P_0 * P_1 * P_2 * \dots * P_{j-1}$$

Si suponemos que todos los P_j crecen un " α %", se verifica que los nuevos " l_j^* ", cumplen la siguiente relación con los anteriores " l_j ":

$$l_j^* = l_j * (1+\alpha)^j$$

Podemos calcular ahora, la probabilidad de estar con vida a la edad j , habiendo comenzado a cotizar a la edad " e_i ", como:

$$l_j^* / l_{e_i}^* = (l_j / l_{e_i}) * (1+\alpha)^{j-e_i}$$

En vista de la relación anterior, si en los cálculos de los valores actuales de las cotizaciones hacemos el siguiente cambio de variables:

$$1+i_\alpha = (1+i_s) / (1+\alpha)$$

y trabajamos con $i(\alpha)$ en lugar de con $i(s)$, llegaremos a idénticos resultados que el caso general, por lo que es válida la siguiente relación para la nueva tasa de contribución:

$$TCI^* = TR * \frac{TMJ}{TMC} * (1+i_\alpha)^{(ECC-ECJ)}$$

Si ahora deshacemos el cambio variables la nueva tasa puede ser expresada como sigue:

$$TCI^* = TR * \frac{TMJ}{TMC} * \frac{(1+\alpha)^{ECJ}}{(1+\alpha)^{ECC}} * (1+i_s)^{(ECC-ECJ)}$$

Por lo que llegamos a los siguientes resultados:

i) Las edades centrales de jubilación (ECJ) y de cotización (ECC) no cambian con el crecimiento de los tiempos de cotización y de jubilación.

ii) La nueva tasa de contribución de equilibrio tiene la siguiente relación con la anterior:

$$TCI^* = TCI * (1+\alpha)^{ECJ-ECC}$$

Como ECJ es mayor que ECC, si crecen las tasas de supervivencia por unidades de tiempo a una tasa constantes ($\alpha > 0$) hay también un crecimiento en la tasa de contribución que es igual al crecimiento acumulado de esa tasa en el período de recuperación (ECJ-ECC).

iii) El crecimiento de la tasa de cotización, está justificada principalmente por el crecimiento de los tiempos medios de jubilación y cotización. En principio sólo podemos establecer que ese crecimiento es debido al crecimiento de la relación entre ambos. No es posible fijar a priori el nuevo nivel de cada uno de dichos tiempos en forma separada.

Volviendo al ejemplo que hemos tratado anteriormente, y suponiendo que la probabilidad es de supervivencia anuales crecen todas a una tasa del 5%, podemos estimar sin mayores problemas el nivel de la nueva tasa de contribución ya que $\alpha = 0.05$, $ECC = 3.766$ y $ECJ = 7.56$. El resultado sería el siguiente:

$$TCI^* = 0.075 * (1 + 0.05)^{3.794} = 0.09$$

Por lo que la nueva tasa pasaría del 7.5% al 9% por el cambio establecido para las probabilidades de supervivencia

Téngase presente que a pesar de la relevancia de los cambios de las diversas variables intervinientes, las Edades Centrales de Cotización y de Jubilación permanecen invariables.

Que las tasas de mortalidad anuales crecen para todas las edades en un mismo porcentaje.

En el caso anterior, como la tasa de crecimiento constante se daba para las probabilidades de supervivencia por unidad de tiempo, las tasas de mortalidad crecían a tasas variables. La limitación existente para tal situación es que las tasas de crecimiento para las tasas de mortalidad disminuyen a medida que aumenta la edad del afiliado, lo que de alguna manera contradice en cierto aspecto los resultados que se han presentado en la evolución de las poblaciones con envejecimiento demográfico.

Por ello, ahora analizaremos el caso en el que se verifique una tasa de crecimiento constante para las tasas de mortalidad .

Consideraremos en este punto un importante resultado³ respecto al efecto que se genera en el equilibrio financiero individual cambios en las tasas de mortalidad. Se ha demostrado que un incremento(decremento) en la tasa de mortalidad es equivalente a un incremento (decremento) en la tasa de interés. Se debe tener en cuenta que este efecto es aplicable al caso sujeto a análisis puesto que es válido sólo para tasas de contribución referidas a sistemas de retiro.

Aplicando esta propiedad para nuestro caso, la fórmula general para la tasa de contribución de equilibrio sería igual a:

$$TCI^* = TR * \frac{TMJ}{TMC} * (1+i(\beta))^{(ECC-ECJ)}$$

Donde $i(\beta)$ es la nueva tasa de interés aplicable para el caso de disminución de un $\beta\%$ en todas las tasas de mortalidad futuras. Al igual que en caso anterior tanto la Edad Central de Cotización como la de Jubilación permanecerían invariables, pero ahora no disponemos de una fórmula para hallar el valor específico de la nueva tasa de interés. Sin embargo, podemos afirmar que al igual que el caso anterior, el crecimiento en el nivel de la Tasa de Cotización, tendrá igual nivel relativo que el aumento del cociente entre el Tiempo Medio de Jubilación (TMJ) y el Tiempo Medio de Cotización, por lo que se cumplirá que;

$$TCI^* = TCI * \left(\frac{TMJ^*}{TMC^*} * \frac{TMC}{TMJ} \right)$$

donde TMJ^* y TMC^* son los nuevos Tiempos medios de jubilación y de cotización.

Para visualizar más adecuadamente el planteo anterior, consideremos que en el ejemplo que estamos manejando, luego del cálculo de la Tasa de

³ Jordan, Chester Wallace, Jr. 1967, Society of Actuaries' textbook on life contingencies (Chicago, Illinois, Society of Actuaries)

Contribución, se desea establecer cómo incidiría en ella una disminución del 5% de las tasas de mortalidad vigentes para las diferentes edades futuras.

Para realizar el análisis deberíamos previamente calcular las tasas de mortalidad vigentes a partir de los cocientes “ l_j / l_{e_j} ”, las nuevas probabilidades de estar con vida a las diferentes edades y los Tiempos medios de cotización y de jubilación.

Nuevas tasas de mortalidad

Edad	l_j / l_{e_j}	q_j	$q_j^*(1-0.05)$	$l_j^* / l_{e_j}^*$	
20	1	0.1000	0.0950	1	
30	0.9	0.1111	0.1056	0.9050	
40	0.8	0.1250	0.1188	0.8095	
50	0.7	0.1429	0.1357	0.7133	
60	0.6	0.1667	0.1583	0.6165	4.0444
70	0.5	0.2000	0.1900	0.5189	
80	0.4	0.7500	0.7125	0.4203	
90	0.1	1.0000	0.9500	0.1208	1.0601

En la última columna podemos visualizar además las nuevas tasas medias de cotización y de jubilación. Por lo tanto, si planteamos para este caso la última relación general para la nueva Tasa de Cotización, llegamos al siguiente resultado.

$$TCI^* = 0.075 * \frac{1.060}{4.04} * \frac{4}{1} = 0.075 * 1.04846 = 0.0786$$

Por lo tanto, para una disminución general de las tasas de mortalidad del 5% es de esperar que la tasa de cotización crezca un 4.85%, lo que elevaría su nivel hasta el 7.86%.

Resulta evidente que los tipos de análisis realizados precedentemente permiten estimar la sensibilidad de la Tasa de cotización ante diversos niveles de cambios tanto en la tasa de mortalidad como la de supervivencia por unidad de tiempo.

CONCLUSIONES

Este análisis ha permitido rediseñar las formulaciones actuariales asociadas a las cotizaciones y las prestaciones de un sistema de prestación definida, de forma de que se puede visualizar concretamente las variables más importantes que explican el equilibrio individual del régimen jubilatorio.

Entre estas variables destacamos los tiempos medios de cotización y de jubilación, los sueldos promedios de cotización y de jubilación y las tasas de contribución y de remplazo del sistema. La particularidad de este enfoque es

que nos permitirá definir adicionalmente las edades centrales de cotización y de jubilación.

Podemos establecer que los aportes totales individuales pueden ser calculados aplicando la tasa de contribuciones, a la masa salarial total de cotizantes, que a su vez puede ser estimada multiplicando el sueldo promedio de cotización (SMC) por la cantidad de unidades de tiempo de cotización esperada (TMC). Su valoración a la edad de inicio de la cotización se realiza aplicando la edad central de cotización (ECC).

Asimismo, el valor actualizado de las prestaciones jubilatorias igual a la actualización desde la edad central de jubilación del producto del Tiempo Medio de Jubilación (TMJ) por el Sueldo medio básico jubilación (SMBJ) y la tasa de remplazo (TR). Por lo tanto, el valor de una jubilación al origen puede ser obtenido por el producto de un sueldo medio básico jubilatorio, calculado a partir de los sueldos de cotización, por la tasa de remplazo aplicable y por la cantidad de unidades de tiempo que se prevé que se cobrará la jubilación, desde una perspectiva de la edad de inicio de cotización "e_i." El resultado anterior debe ser descontado por el factor de actualización en el que tienen especial incidencia la tasa de interés real sobre salarios y la edad central de jubilación.

Por otra parte, se puede concluir que la tasa de cotización de equilibrio depende de una relación económica entre el nivel de la jubilación promedio y el sueldo medio de actividad, una relación demográfica entre los años medios de jubilación y años medios de cotización y un factor financiero en el que inciden tanto la tasa de interés real sobre salarios considerada en el análisis así como la diferencia entre los años medios de jubilación y los de cotización, que representa el período en el que se recuperarían en promedio los aportes.

Es interesante tener presente que los resultados de este análisis permiten concluir que las expresiones para el equilibrio financiero individual y las de un sistema de reparto son similares. La diferencia se encuentra en las relaciones demográficas, puesto que en reparto ésta relaciona el número de jubilaciones con el de cotizaciones, mientras que en el equilibrio individual se relacionan años medios de jubilación con los de cotización. Además, en el equilibrio individual figura un factor adicional financiero de actualización, que no aparece en la ecuación del régimen de reparto.

Podemos establecer por último, que las expresiones desarrolladas en este análisis permiten no sólo una clara visualización de la influencia de las diversas variables que deben ser tenidas en cuenta para alcanzar el equilibrio individual, sino que a partir de los resultados obtenidos es posible realizar en forma simple diversos análisis de sensibilidad de los resultados ante cambios de los diversos parámetros intervinientes.