ALGORITMO PARA LA APERTURA MENSUAL

DE LAS

TASAS DE MORTALIDAD

Cr. Luis Camacho

ALGORITMO PARA LA APERTURA MENSUAL DE LAS TASAS DE MORTALIDAD

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, las fórmulas actuariales básicas que permiten calcular costos o cuotas de rentas se basan en variables definidas en tablas de mortalidad completas, donde la apertura de estas variables es anual. Estas fórmulas son exactas cuando el intervalo entre los pagos también es anual.

Cuando las rentas son fraccionarias, es decir con cuotas a intervalos inferiores al año, se aplican fórmulas aproximadas que ajustan las calculadas para las rentas enteras.

Es de destacar que tales formulaciones computan, para las personas con edades fraccionarias en años, sólo los años completos por lo que descartan la fracción de año adicional. Ello es consecuencia de la heterogeneidad existente entre los períodos fraccionarios entre pagos y la apertura anual de las tablas de mortalidad.

La no valoración de situaciones en la que se presenten edades fraccionarias en años, puede llevar a situaciones que afecten los ingresos de los perceptores de rentas vitalicias, en especial para personas mayores.

Tal es el caso de ciertos regímenes jubilatorios de aportes definidas cuyos factores de rentas (coeficientes que se aplican al capital acumulado para determinar la prestación inicial) varían sólo con la edad en años. A modo de ejemplo, en el régimen de ahorro individual uruguayo los factores de rentas crecen sólo para retiros a edades enteras en años. En tal caso, si una persona se retira a una edad fraccionaria en años puede perder, por aplicación de un factor fijo por edad, hasta 4% respecto a la jubilación que desde un punto de vista actuarial le hubiera correspondido. Este “impuesto” vitalicio está originado por el hecho de que las fórmulas actuariales clásicas no contemplan estas situaciones, el cual es obviado parcialmente mediante interpolaciones de los factores de rentas para las edades enteras más cercanas a la edad real.

Las interpolaciones, si bien atenúan las diferencias, no es la forma adecuada de determinar el factor de renta exacto. Con seguridad, tales carencias pueden ser obviadas si los cálculos actuariales se basan en tasas de mortalidad mensuales puesto que en este caso todas las variables intervinientes estarían expresadas en una misma unidad de tiempo.

En este análisis, se establece una forma de estimar las probabilidades de muerte aplicando un algoritmo específico. A través de ese proceso iterativo se puede llegar a esas probabilidades desagregadas, siempre que se cumplan ciertas propiedades de continuidad y de consistencia definidas en el presente análisis.

A continuación se establecen las formulaciones básicas que permiten llegar al planteo de las etapas de un algoritmo del cual se demuestra la convergencia y la concordancia de ciertos resultados actuariales que de él se derivan.

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LAS PROPIEDADES DE CONTINUIDAD, DE CONSISTENCIA Y DE CONCORDANCIA

Las variables básicas a partir de las cuales se realizará el análisis están contenidas en las tablas de mortalidad completas, por lo que su apertura por edades es anual. Entonces, esas variables estimarán guarismos relacionadas con las edades exactas en años.

La variable más importante es la tasa de mortalidad anual " q_x" que puede ser definida como se establece a continuación:

l_x = número de sobrevivientes de un grupo inicial a la edad "x" (en años) recién cumplida
$q_x = (l_x - l_{x+1}) / l_x$ tasa de mortalidad para los sobrevivientes de edad "x".
$1- q_x$ = Probabilidad de sobrevivencia de un año para quienes llegaron con vida a la edad "x".

El objetivo del análisis es derivar, mediante la aplicación de un proceso iterativo, las probabilidades de mortalidad q^*_z para cada intervalo mensual de edad posible. A partir de ello, se podrán inferir los siguiente valores significativos:

$1- q^*_z$ = probabilidad de sobrevivencia de un mes más para quienes llegaron con
vida a la edad "z" (en meses)
l^*_z = número de sobrevivientes de un grupo inicial a la edad z (en meses) recién
cumplida = $l^*_{z-1} * (1 - q^*_{z-1})$

Las variables básicas anteriores pueden ser denotadas además de la siguiente forma:

(1) $l^*_z = l_{x,y}$ donde la edad exacta z en meses es igual a la edad en "x" años
$q^*_z = q_{x,y}$ más los "y" meses adicionales, por lo tanto: $z = 12\,x + y$

(con y=0,1,..,11)

Además, se debe verificar la siguiente igualdad:

(2) $l_x = l_{x,0}$ para todo x

PROPIEDAD 1: CONTINUIDAD DE LOS RESULTADOS

Esta propiedad se basa en las relaciones que deben existir entre la tasa de mortalidad mensual para una edad exacta en años asociada a la edad exacta en años inmediata superior.

En tal sentido, téngase presente que $q_{x,y}$ representa la tasa de mortalidad mensual para una persona de "x " años más "y " meses adicionales de edad. Para considerar todas las edades intermedias entre dos edades enteras en años, es necesario considerar, dada una edad exacta de x años, todos los posibles "y" adicionales comprendidos entre 0 y 11. Cuando y=0 planteamos la probabilidad para una persona de edad exacta x, pero cuando y=12 expresamos una forma particular de plantear la edad "x+1" exacta en años.

Esta última equivalencia la trasladamos a las tasas de mortalidad bajo la siguiente relación:

(3) $$q_{x,12} = q_{x+1,0}$$

Planteado en otros términos, la probabilidad de que una persona sobreviva 12 meses luego de cumplir "x" años de edad es lo mismo que llegar con vida a "x +1" años de edad exactos. La propiedad, aún cuando es evidente, resulta muy importante para el planteo del algoritmo que se propone en este análisis.

En ese sentido cabe establecer que para que las tasas de mortalidad calculadas a partir de los resultados del algoritmo cumplan con la relación (3), es necesario que se verifique también la siguiente:

(4) $$H^{(n)}_{x,12} = H^{(n)}_{x+1,0}$$

Si bien las $H^{(n)}_{x,y}$ se definen más adelante, en la etapa de "ajuste" del algoritmo, podemos establecer que expresan, para la iteración "n", el logaritmo de la probabilidad de sobrevivencia mensual. Por lo tanto, si esta igualdad no se verifica no será posible cumplir tampoco con la (3). Entonces, a los efectos del análisis que se realiza a continuación, la propiedad de continuidad implicará necesariamente el cumplimiento de la relación (4).

PROPIEDAD 2 : CONSISTENCIA DE LOS RESULTADOS

La siguiente propiedad permite relacionar las probabilidades de sobrevivencia mensuales con la anual:

$$1- q_x = (1- q_{x,0})(1- q_{x,1}) \dots (1- q_{x,11})$$

Para que una persona de edad x sobreviva un año debe sobrevivir cada uno de los doce meses que lo componen. Esta equivalencia puede ser expresada en términos probabilísticos a través de la igualdad de la probabilidad anual como el producto de las probabilidades mensuales correspondientes.

A los efectos del planteo del algoritmo, preferimos visualizar esta propiedad a través de los logaritmos neperianos de ambos miembros de la igualdad anterior. En efecto, si consideramos los logaritmos, la propiedad puede ser expresada como sigue:

$$LN(1-q_x) = \underset{y=0}{\overset{y=11}{\text{SUMA}}}\,[\,LN\,(1-q_{x,y})\,] \tag{5}$$

Tener en cuenta que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.

PROPIEDAD 3 : CONCORDANCIA DE LOS RESULTADOS

Un objetivo de la apertura de las tasas de mortalidad es el de permitir considerar explícitamente las probabilidades de sobrevivencia en los períodos fraccionarios en años de una forma adecuada desde un punto de vista actuarial.

En este sentido, es fundamental que para las edades exactas en años, los resultados que se obtengan de la aplicación de la nueva formulación deberán coincidir con los que se pueden hallar aplicando las fórmulas actuariales tradicionales sobre tasas de mortalidad anuales.

Sólo se podrán validar los resultados del algoritmo si se prueba tal concordancia, además de las propiedades de continuidad y consistencias definidas anteriormente.

3. DEFINICIÓN DE UNA PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA ANUAL A PARTIR DE UNA EDAD EXACTA EN MESES

Plantearemos a continuación una función a partir del logaritmo de la probabilidad de sobrevivencia de dos edades exactas en años sucesivos, tal cual se puede apreciar seguidamente.

$$R_{x,y} = (LN(1-q_x))^{(12-Y)/12}\ .\ (LN(1-q_{x+1}))^{Y/12} \tag{6}$$

$$\text{para}\quad x = 0,1,2,....108$$
$$y = 0,1,2...11$$

Con $R_{x,y}$ se busca estimar, a partir de las edades exactas en años, el logaritmo de la probabilidad de sobrevivencia anual de una persona de “x” años más “y” meses de edad.

$R_{x,y}$ es un promedio geométrico entre el logaritmo de la probabilidad de sobrevivencia anual para una persona de edad exacta x y el logaritmo de la probabilidad de sobrevivencia para una persona de edad exacta x+1. Para que el producto de los logaritmos sea un promedio, los exponentes deben cumplir la doble propiedad de que no sean negativos y de que su suma sea igual a uno.

Además, los exponentes indican respectivamente el número de meses del año que se inicia en una edad "x,y", en los cuales se tiene edad "x" en años y en los cuales se tiene una edad "x+1". A vía de ejemplo, consideremos el caso en que se desee calcular el valor de $R_{30,4}$ que es el logaritmo anual de la probabilidad de sobrevivencia para una persona con 30 años y 4 meses de edad. El año para el cual calculamos la probabilidad contiene los meses, 4,5,6,7,8,9,10, y 11 para los 30 años edad y los meses 0,1,2,3, para los 31 años de edad. Entonces, el primer exponente en $R_{30,4}$ será 8/12 y el segundo 4/12 .

Por ello, se cumple que $R_{x,0}$ = LN(1-qx) porque los doce meses que se promedian corresponden a la edad x. Además, $R_{x,12}=R_{x+1,0}$=LN(1-qx+1), que coincide con los logaritmos asociados a las probabilidades de sobrevivencia a las correspondientes edades exacta x+1 en años.

La probabilidad de supervivencia anual para una persona de "x" años más "y" meses de edad, calculada a partir de Rxy, puede ser expresada como:

$$\text{Probabilidad de Supervivencia Anual}(x,y) = e^{R\,x,y}$$

Estos resultados constituyen sólo el punto de partida para la estimación de las probabilidades mensuales. Como se verá más adelante, los únicos resultados globales que se respetan son los asociados a las edades exactas en años de edad, puesto que las restantes probabilidades anuales se obtendrán, luego de aplicado el algoritmo, por el mecanismo de la acumulación de las probabilidades mensuales correspondientes. No obstante, se podrá comprobar que las diferencias en las probabilidades anuales obtenidas por ambos procedimientos son no significativas.

Cabe establecer que inclusive como planteo aislado, sería más conveniente definir Rx,y como un promedio aritmético en lugar de geométrico, ya que para la mayoría de los casos los logaritmos de las probabilidades de supervivencia tienen un crecimiento casi lineal. Sin embargo, a los efectos del algoritmo es más eficiente trabajar con promedios geométricos.

4. DEFINICIÓN DE UNA PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA MENSUAL A PARTIR DE UNA EDAD EXACTA EN MESES, CON FACTOR DE CORRECCIÓN FIJO POR AÑOS DE EDAD

Planteamos a continuación a Sx,y como el duodécimo de Rx,y (logaritmo de las probabilidad de supervivencia anual partiendo de una edad x,y), multiplicado por un factor de ajuste $K^{(0)}_x$.

$$S_{xy} = K^{(0)}_{x} \, . \, R_{xy} \,/\, 12$$
$$\text{para } x = 0,1,2,....108$$
$$y = 0,1,2...11$$

$K^{(0)}_x$ es el factor constante para cada "x", cualquiera sea el mes "y" considerado, tal que se cumpla la propiedad 2, es decir que la suma de los logaritmos de las probabilidades mensuales de supervivencia sea igual al logaritmo de la probabilidad anual asociada.

La expresión del $K^{(0)}x$, es la siguiente:

(7) $K^{(0)}x = 12.((LN(1-q_{x+1})/ LN(1-q_x))^{1/12}-1)/((LN(1-q_{x+1})/ LN(1-q_x)-1)$
para x = 0,1,2,....w-2

A continuación, verificaremos que este factor permite que Sx,y cumpla con la propiedad 2. Para ello calculamos la suma de los valores Sx,y para todos los meses "y" posibles que van desde el cumplimiento de la edad "x" en años hasta el mes anterior al cumplimiento de la edad "x+1":

$$\underset{y=0}{\overset{y=11}{\mathrm{SUMA}}}[S_{x,y}] = K^{(0)}_x .(1/12). \underset{y=0}{\overset{y=11}{\mathrm{SUMA}}} [(LN(1-q_x))^{(12-Y)/12} . (LN(1-q_{x+1}))^{Y/12}] =$$

$$= K^{(0)}_x . LN(1-q_x).(1/12). \underset{y=0}{\overset{y=11}{\mathrm{SUMA}}} [(R_{x+1}/ R_x)^{y/12}]$$

con $R_x = LN(1-q_x)$

El último factor de la expresión anterior es igual a la suma de una progresión geométrica de razón $(R_{x+1}/R_x)^{1/12}$. El resultado de esa suma es igual a:

$$\underset{y=0}{\overset{y=11}{\mathrm{SUMA}}} [(R_{x+1}/ R_x)^{y/12}] = (R_{x+1}/ R_x - 1) / ((R_{x+1}/ R_x)^{1/12} - 1) = 12/ K^{(0)}_x$$

Por lo que se cumple:

$$\underset{y=0}{\overset{y=11}{\mathrm{SUMA}}} [S_{x,y}] = LN(1-q_x)$$

Entonces, como $s_{x,y}$ es un promedio ponderado de los logaritmos neperianos de las probabilidades de supervivencias anuales ajustado por el factor $K^{(0)}_x$ y como además cumple con la propiedad "2" definida anteriormente, podemos establecer:

$$LN(1-q_{x,y}) = S^{(0)}_{x,y}$$

Que equivale al siguiente resultado:

$$1-q_{x,y} = e^{Sx,y}$$

A partir del cual es posible obtener las diferentes probabilidades mensuales buscadas.

Sin embargo, esta solución no es la más adecuada porque no verifica la propiedad 1, en especial porque, por definición, los $K^{(0)}_x$ sucesivos en "x" son diferentes. Ello puede ser apreciado planteando las expresiones genéricas para $S_{x,12}$ y $S_{x+1,0}$:

$$S_{x,12} = K^{(0)}{}_{x} \;.\; R_{x,12} \;/\; 12$$
$$S_{x+1,0} = K^{(0)}{}_{x+1} \;.\; R_{x+1,0} \;/\; 12$$

Como $K^{(0)}{}_{x} >< K^{(0)}{}_{x+1}$ -------> $S_{x,12} >< S_{x+1,}$

Con el objeto de ajustar esta incompatibilidad , aplicaremos seguidamente, en lugar de los factores $K^{(0)}{}_{x}$ constantes, una serie de factores variables tanto en "x " como en "y".

5. DEFINICIÓN DE UNA PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA MENSUAL A PARTIR DE UNA EDAD EXACTA EN MESES, CON FACTORES DE CORRECCIÓN VARIABLES.

A los efectos de la inclusión de estos nuevos factores, plantearemos en lugar de $S_{x,y}$, una nueva expresión que denotaremos por $H^{(0)}{}_{x,y}$ que estará afectada por $F^{(0)}{}_{x,y}$ de la siguiente forma:

(8) $$H^{(0)}{}_{x,y} = F^{(0)}{}_{x,y} \;.\; R_{x,y} \;/\; 12$$

para $x = 0,1,2,....108$
$y = 0,1,2...11$

$F^{(0)}{}_{x,y}$ se define como un promedio de los valores constantes $K^{(0)}{}_{x-1}$, $K^{(0)}{}_{x}$ y $K^{(0)}{}_{x+1.}$ En los coeficientes de ponderación de los K para obtener el promedio se encuentra la variable "y" en la forma que se explícita a continuación:

$$F^{(0)}{}_{x,y} = (K^{(0)}{}_{x}{}^{(y+6)/12}) \;.\; (K^{(0)}{}_{x-1}{}^{(6-y)/12}) \quad \text{para } y <=6$$
$$F^{(0)}{}_{x,y} = (K^{(0)}{}_{x}{}^{(18-y)/12}) \;.\; (K^{(0)}{}_{x+1}{}^{(y-6)/12}) \quad \text{para } y >=6$$

El valor de F para x,12 es entonces igual a:

$$F^{(0)}{}_{x,12} = K^{(0)}{}_{x}{}^{1/2} \;.\; K^{(0)}{}_{x+1}{}^{1/2}$$

Para x+1, 0, es igual a:

$$F^{(0)}{}_{x+1,0} = K^{(0)}{}_{x}{}^{1/2} \;.\; K^{(0)}{}_{x+1}{}^{1/2}$$

Por lo tanto, se cumple que $F^{(0)}{}_{x,12} = F^{(0)}{}_{x+1,0}$ para todo x. Entonces, con una definición de este tipo aseguramos la continuidad requerida por la propiedad número "1" , en especial porque, $H^{(0)}{}_{x,12} = H^{(0)}{}_{x+1,0}$.

Sin embargo, no se cumple con la propiedad número "2" , puesto que para ello sería necesario que $K^{(0)}{}_{x} = K^{(0)}{}_{x+1}$ para todo x. Por definición de $K^{(0)}{}_{x}$, la condición anterior no se cumple.

Como se verá mas adelante, a través de un proceso iterativo se pueden obtener sucesivas $H^{(n)}x,y$ cuya acumulación se irá acercando a la igualdad requerida por la propiedad "2".

La idea general en la que se basa el algoritmo es que a partir de resultados sucesivos, se obtenga un nuevos factores $F_{x,y}$ variables que multiplicados a los $H_{x,y}$ precedentes permita obtener una nueva función $H_{x,y}$ que se acerque más al cumplimiento de la propiedad. Si se considera que el ajuste no es el adecuado, se puede generar un nuevo factor $F_{x,y}$, que permitirá a su vez obtener una nueva función $H_{x,y}$. Este procedimiento puede ser seguido tantas veces como sea necesario hasta lograr el grado de ajuste deseado.

La última función $H^{(N)}_{x,y}$, será la que permitirá establecer los niveles de las probabilidades de sobrevivencia mensuales.

A continuación se explícita las diversas etapas que se deben seguir para que este proceso iterativo proporcione los resultados más adecuados.

6. ALGORITMO UTILIZADO PARA LA ESTIMACIÓN DE LAS TASAS DE MORTALIDAD MENSUALES

Plantearemos un proceso de aproximación sucesiva a la solución en cuatro etapas que denominamos de:

INICIO: Donde se calculan los distintos valores iniciales de $H^{(0)}xy$, a partir de una particular definición de los coeficientes $F^{(0)}_{x,y}$. Estos serán el resultado de promediar los $K^{(0)}$ adyacentes a $K^{(0)}_{x}$, de forma de permitir el cumplimiento de la propiedad 1.

SONDEO: Donde se analiza si los valores $K^{(n)}_{x}$ cumplen el nivel de ajuste deseado en relación al desvió máximo admitido.

AJUSTE: Donde se calculan los valores $K^{(n)}_{x}$ de una nueva iteración. A partir de ellos se calculan los coeficientes $F^{(n)}_{x,y}$ que se definen en términos similares a los $F^{(0)}_{x,y}$. Ello permite que a su vez se calcule una nueva $H^{(n)}xy$.

RESULTADO: Donde a partir del $H^{(n)}xy$ que cumple con el nivel de ajuste deseado se obtienen las tasas q_{xy}

El detalle de los cálculos y cómputos específicos que se deben realizar en cada una de las etapas se establece a continuación:

Etapa de INICIO

Calcular en forma ordenada el valor de las siguientes expresiones:

$\underline{K^{(0)}x > 0}$

$K^{(0)}x = 12.((LN(1-q_{x+1})/LN(1-q_x))^{1/12}-1)/((LN(1-q_{x+1})/LN(1-q_x)-1)$

para x= 0,1,2,....w-3

Con $K^{(0)}_{-1} = K^{(0)}_{0}$

$K^{(0)}_{w} = K^{(0)}_{w-1} = K^{(0)}_{w-2} = K^{(0)}_{w-3}$

2) $\underline{F^{(0)}_{x,y}}$

i) $F^{(0)}_{x,y} = \left({K^{(0)}_{x}}^{(y+6)/12} \right) . \left({K^{(0)}_{x-1}}^{(6-y)/12} \right)$ para $0 <= y <= 6$

ii) $F^{(0)}_{x,y} = \left({K^{(0)}_{x}}^{(18-y)/12} \right) . \left({K^{(0)}_{x+1}}^{(y-6)/12} \right)$ para $6 <= y <= 11$

3) Rxy <= 0

$R_{x,y} = (LN(1- q_x))^{(12-Y)/12} \;.\; (LN(1- q_{x+1}))^{Y/12}$

para x= 0,1,2,....w-2

y=0,1,2...11

$H^{(0)}xy$

$H^{(0)}xy = (Rxy \;/\; 12) \,.\, F^{(0)}_{xy}$

para x= 0,1,2,....w-2

y=0,1,2...11

5) $K^{(1)}(x)$

$$K^{(1)}_x = (LN(1 - q_x)) \;/\; \sum_{y=0}^{y=11} [H^{(0)}_{xy}]$$

para x=0,1,...,w-1

$K^{(i)}_{-1} = K^{(i)}_0$

$K^{(i)}_w = K^{(i)}_{w-1}$

Pasar a la Etapa de SONDEO

Etapa de SONDEO

Para la iteración i =1,2,....

i) Si $|K^{(i)}(X)-1| <= \varepsilon \quad (\varepsilon>0)$

Pasar a la etapa de RESULTADO

ii)En caso contrario pasar a la etapa de AJUSTE

Etapa de AJUSTE

Procedemos en esta etapa de la siguiente manera:

1) Calcular $F^{(i)}_{x,y}$

Para $0 <= y <= 6$ $\quad F^{(i)}_{x,y} = K^{(i)}_x{}^{(y+6)/12} \,.\, K^{(i)}_{x-1}{}^{(6-y)/12}$

Para $6 <= y <= 11$ $\quad F^{(i)}_{x,y} = K^{(i)}_x{}^{(18-y)/12} \,.\, K^{(i)}_{x+1}{}^{(y-6)/12}$

2) Calcular $\quad H^{(i)}_{xy} = H^{(i-1)}_{xy} \,.\, F^{(i)}_{x,y}$

para x=0,1,2,...,w-1

y= 0,1,...,11

Calcular de $K^{(i+1)}(x)$

- $K^{(i+1)}(x) = LN(1 - q_x) \;/\; \sum_{y=0}^{y=11} [H^{(i)}_{xy}]$

  para x=0,.,w -1
- $K^{(i+1)}_{-1} = K^{(i+1)}_0$
- $K^{(i+1)}_w = K^{(i+1)}_{w-1}$

Pasar a la etapa de SONDEO

Etapa de RESULTADO

1) Calcular las tasas de mortalidad mensual como:

$$q_{xy} = 1 - e^{H(i)xy}$$

para x =0,1,2,...,w-1
y = 0,1,...,11

Calcular $l^{*}z$, donde:

$$l^{*}z = l^{*}_{z-1} . (1-q_{z})$$

para z = 12.x+y

7. CONVERGENCIA DEL ALGORITMO

El objetivo del algoritmo es el de generar una sucesión $H^{(n)}_{xy}$ convergente que permita cumplir con las dos primeras propiedades propuestas para las probabilidades de mortalidad mensuales.

La convergencia implica que el valor absoluto de la diferencia de la función entre dos puntos sucesivos sea inferior a un número tan pequeño como se desee, y a partir de allí las diferencias posteriores no superen a ese pequeño numero prefijado.:

$$\left| H^{(n)}_{x,y} - H^{(n-1)}_{x,y} \right| =< \varepsilon \qquad (\varepsilon >0)$$

para n >= N

Donde: $H^{(n)}_{x,y} = H^{(n-1)}_{x,y} * F^{(n)}_{x,y}$

Con:

$$F^{(n)}_{x,y} = K^{(n)\,(y+6)/12}_{x} . K^{(n)\,(6-y)/12}_{x-1} \qquad \text{para } 0 <= y <= 6$$

$$F^{(n)}_{x,y} = K^{(n)\,(18-y)/12}_{x} . K^{(n)\,(y-6)/12}_{x+1} \qquad \text{para } 6 <= y <= 11$$

Respecto a las $K^{(n)}_{x}$ para todo "x", en el APENDICE, se demuestran una serie de propiedades respecto a sus posibles valores máximos y mínimos en "x" para cada iteración "n". Sin embargo, la característica más importante que se demuestra en el APENDICE, a partir de tales propiedades, es que para "n" tendiendo a infinito $K^{(n)}_{x}$ tiende a "uno" para todo x.

Teniendo en cuenta esta última característica, podemos establecer que $F^{(n)}_{x,y}$ tiende también a "uno" para todo x e y, ya que están definido a partir de productos de $K^{(n)}$.
A su vez, como $H^{(n)}_{x,y}$ es igual a producto de $H^{(n-1)}_{x,y}$ por $F^{(n)}_{x,y}$, se puede deducir que tiende a $H^{(n-1)}_{x,y}$ para "n" tendiendo a infinito.

Ello significa que a partir de cierta iteración "N", la diferencia entre dos $H^{(n)}_{x,y}$ sucesivas se hace tan chica como queramos.

Con este resultado , se demuestra la convergencia del algoritmo, en cuanto a que el mismo proporcionará una solución para cada edad simple medida en meses. En otros términos, el algoritmo siempre finalizará en la etapa de RESULTADOS.

8. EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL ALGORITMO

Una de las ventajas de este algoritmo es que pueden utilizarse Planillas Electrónicas para sus iteraciones. Con un número pequeño de columnas programadas es posible llegar en forma sencilla al resultado final. Además como el algoritmo es potente, por lo general la convergencia final se logrará en pocas iteraciones.

A los efectos de ilustrar el funcionamiento del algoritmo se plantea un ejemplo de apertura de una tabla de mortalidad específica. Partiremos de la información contenida en una tabla de mortalidad anual para la población femenina uruguaya.

A los efectos de facilitar la presentación de los resultados, se muestran cuadros con algunos datos característicos, ya que resulta prácticamente imposible presentar los resultados para 1320 líneas que representan los meses necesarios de los 110 años considerados (edad límite de la tabla completa).

A continuación se muestra un cuadro con los l_x para las edades 49 a 51 años de edad.

Mujeres	lx
49	94294.23887073
50	93971.08248503
51	93630.46863071

Se presentará la información de las diferentes etapas sólo para los diferentes meses de edad correspondientes a personas de 50 años de edad entera.
En el siguiente cuadro figuran los resultados más importantes para la etapa inicial del algoritmo:

ALGORITMO				
	Iteración			
	0	0	0	0
	K_x	Fxy	Rxy	Hxy
Meses				
600	0.96353905	0.96898811	-0.0036313	-0.0002932
601		0.968077799	-0.0036557	-0.0002949
602		0.967168343	-0.0036803	-0.0002966
603		0.966259741	-0.0037050	-0.0002983
604		0.965351993	-0.0037300	-0.0003001
605		0.964445097	-0.0037550	-0.0003018
606		0.963539054	-0.0037803	-0.0003035
607		0.963003395	-0.0037803	-0.0003034
608		0.962468034	-0.0038313	-0.0003073
609		0.96193297	-0.0038571	-0.0003092
610		0.961398204	-0.0038831	-0.0003111
611		0.960863736	-0.0039092	-0.0003130
612	0.95713076	0.960329564	-0.0039355	-0.0003149

Lo valores del cuadro se calculan aplicando las formulas planteadas para la etapa de INICIO, tal como lo establece el algoritmo. En el siguiente cuadro figuran los valores de esta primer iteración:

"ε" = 0.00000001

		iteración	
1	1	1	1
Kx	Sondeo	Fxy	Hx
	110		
0.9997	1	1.0016796	-0.00029371245853
		1.0013444	-0.00029531161471
		1.0010093	-0.00029691947770
		1.0006743	-0.00029853609492
		1.0003394	-0.00030016151402
		1.0000047	-0.00030179578293
		0.9996700	-0.00030343894983
		0.9996351	-0.00030325966603
		0.9996002	-0.00030717183006
		0.9995653	-0.00030905545562
		0.9996552	-0.00031098946156
		0.9994954	-0.00031285742963
0.9993	1	0.9994605	-0.00031477592017

Como se ha establecido en la descripción del algoritmo, la próxima etapa es la de SONDEO. En ese sentido es posible apreciar en el cuadro que debajo de la celda con la denominación de “sondeo” figura el número 110. Ese número se obtiene por acumulación de los valores que se encuentran debajo en su misma columna.

En esa columna, para cada x se evalúa si el valor de $K^{(n)}_x$ que figura en la columna de la izquierda cumple que $\left|K^{(n)}_x - 1\right| =< \varepsilon$ (en este ejemplo, el nivel de a es igual a 0.00000001), en cuyo caso el valor de la celda es 0, de lo contrario es 1. Por lo tanto, los números “1” que figuran en la columna debajo de la palabra sondeo, indica que los $K^{(n)}_x$ correspondientes no cumplen con el ajuste requerido.

El número 110 indica la cantidad de $K^{(1)}x$, para los cuales el desvío es superior al aceptado, por lo que se debe realizar por lo menos una nueva iteración, pasándose a la siguiente etapa de AJUSTE.

En el mismo cuadro se procede calcular un nuevo Hx, lo que permite pasar a la iteración 2, que estará asociada a un nuevo cuadro con la misma estructura que el anterior. Si en esta nueva iteración, el número debajo de la celda de sondeo es mayor que cero, se debe pasar a otra nueva iteración y así sucesivamente hasta que ese número sea 0, puesto que con ello nos aseguramos desvíos menores al límite "ε" máximo permitido.

En este caso, en la iteración 22 se llega al cuadro final, que muestra la etapa de RESULTADO, tal cual se aprecia seguidamente:

		"ε" =	0.00000001
		Iteración	
22	22	22	22
Kx	Sondeo	Fxy	Hx
	0		
1	0	1.0000000	-0.00029381597503
		1.0000000	-0.00029534867016
		1.0000000	-0.00029688936061
		1.0000000	-0.00029843808810
		1.0000000	-0.00029999489454
		1.0000000	-0.00030155982209
		1.0000000	-0.00030313291311
		1.0000000	-0.00030297204877
		1.0000000	-0.00030689897747
		1.0000000	-0.00030879951931
		1.0000000	-0.00031076547749
		1.0000000	-0.00031263598448
1	0	1.0000000	-0.00031457205404

Se destaca que en la planilla electrónica basta con definir tres tipos de columnas, en el primero estarán comprendidas las correspondientes a la etapa de inicio, el segundo las de la primera iteración y en el tercero las de la segunda iteración. Estos dos últimos grupos tendrán similar programaciones pero referidas al grupo de columnas precedente.

De esta forma, si para la segunda iteración no se llegó al óptimo, es posible copiar todos los valores del tercer grupo en el segundo, obteniendo automáticamente en el tercer grupo de columnas los resultados de la tercer iteración. De esta forma se sigue copiando valores al segundo grupo de columnas hasta obtener el resultado de 0 en la celda debajo de la palabra Sondeo. Es evidente que este proceso puede ser programado en una MACRO, cuya corrida permitirá llegar al resultado en segundos.
Volviendo al último cuadro, podemos realizar a partir de los valores de su última columna la apertura de la tasa anual de mortalidad, teniendo en cuenta que:

$$1 - q_{xy} = e^{H(n)xy}$$

además:

$$l_{x,y+1} = l_{x,y} \cdot (1- q_{x,y})$$

$$l^*_z = l_{x,y} \quad \text{con} \quad z = 12.x+y$$

A continuación se muestra el número de supervivientes resultantes de un grupo inicial de 100.000, para las edades comprendidas entre los 600 meses y 612 meses.

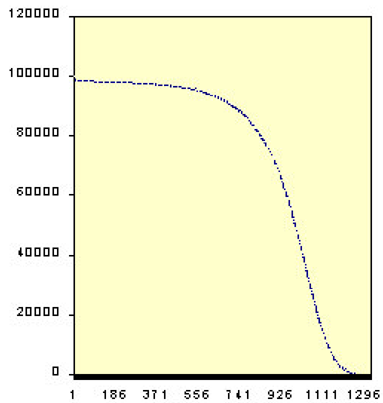
	Resultado Final
mes	l^*z
600	93971.08249
601	93943.47634
602	93915.73435
603	93887.85591
604	93859.84038
605	93831.68713
606	93803.39553
607	93774.96494
608	93746.55805
609	93717.79174
610	93688.85620
611	93659.74546
612	93630.46863

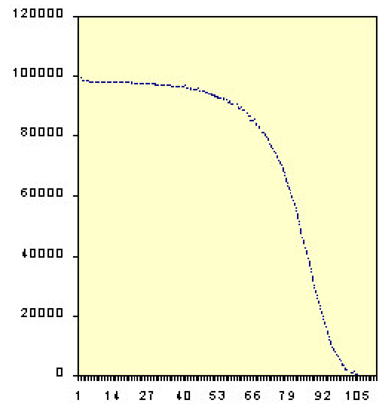
Se puede observar que: $l_{x=50} = l^*_{m=600}$ y $l_{x=51} = l^*_{m=612}$.

En el siguiente gráfico se puede apreciar la evolución de l^*_z para todo m comprendido entre 0 y 1320 y de l_x para todo x comprendido entre 0 y 110,

La evolución general de l^*_z y de l_x es prácticamente la misma a pesar de que una es la unión de sólo 110 segmentos y la otra de 1320, lo que es una buena muestra del excelente grado de ajuste que proporciona el algoritmo propuesto para la evolución del número de sobrevivientes a edades mensuales respecto a los sobrevivientes a edades anuales exactas.

l^*_z $\qquad\qquad\qquad$ l_x





9. VERIFICACIÓN DE LA PROPIEDAD DE CONCORDANCIA DE LOS RESULTADOS DEL ALGORITMO

Al comienzo de este planteo se estableció que los resultados del algoritmo sólo serían validados si se cumplían tres propiedades básicas que denominamos de Continuidad, de Consistencia y de Convergencia. Las dos primeras, por construcción del algoritmo deben necesariamente ser cumplidas. La tercera, debe verificarse en cada caso comparando los resultados que proporcionaría la aplicación de estos resultados en la valoración de los costos actuariales de rentas contingentes con los que se obtendrían de aplicar las fórmulas clásicas sobre las tasas de mortalidad anuales.

Para visualizar esta concordancia consideremos por un lado las rentas vitalicias y por otro las temporarias.

A. CONCORDANCIA DE LOS RESULTADOS PARA RENTAS VITALICIAS

Evaluaremos en forma separada a las rentas con pagos anuales y de las rentas con cuotas mensuales puesto que serían los dos extremos posibles de rentas en cuanto al número total de cuotas. Tener presente que para períodos entre pagos menores al mes, la apertura de las tasas de mortalidad por mes no permite realizar estimaciones de costos.

i) Rentas Enteras

El costo de una renta vitalicia vencida unitaria computando tasas de mortalidad anual, puede ser expresado como la suma de los siguientes factores:

$$a_x = \frac{l\,x{+}1.(1+i)^{-1} + l\,x{+}2.(1+i)^{-2} + \ldots\ldots. + l\,w(1+i)^{-(w-x)}}{lx}$$

donde lx es el número de sobrevivientes a la edad exacta x en años de una cohorte incial e i es la tasa de interés efectiva anual.
El costo de una renta vitalicia unitaria, considerando tasas de mortalidad mensual tendría la siguiente formulación, para una persona de edad z exacta en meses.

$$a^{*(1/12)}_z = \frac{l^*z{+}12.(1+i)^{-1} + l^*z{+}24.(1+i)^{-1} + \ldots.. + l^*(12.w).(1+i)^{-(12.w-z)}}{l^*z}$$

El exponente de "a" indica el período en meses del intervalo entre pagos. Además l^*_z es el número de sobrevivientes a la edad z en meses de una cohorte inicial.

de la relación (2): $l_x = l_{x,0}$ para todo x

y de la relación (1): $l_{x,0} = l^*_z$

Por lo tanto: $l_x = l^*_z$ donde z= 12*x

Ello implica que se cumple: $a_x = a^{*(1/12)}_z$ para todo x

Por lo tanto, los resultados para ambos casos son idénticos cualquiera sea la edad entera en años considerada.

ii) Rentas mensuales

El costo de una renta unitaria mensual vencida, puede ser planteado a partir de la fórmula tradicional de la siguiente manera:

$$a^{(12)}_x = \left(\frac{Nx+1}{Dx} + \frac{11}{24} \right) . 12$$

donde : - $Dx = lx \,.\, (1+i)^{-x}$

- $Nx = \underset{j=x}{\overset{j=w}{\text{SUMA}}} [\,Dj\,]$

En el ejemplo que estamos considerando, los resultados que se obtendrían aplicando la fórmula clásica para ciertos casos seleccionados serían:

Costo de una renta vitalicia mensual				
Edad	tasa de interés			
En años	2%	3%	4%	5%
0	465.66	356.00	283.90	234.29
10	445.14	347.42	280.88	233.86
20	411.67	328.81	270.22	227.55
30	371.75	304.57	255.14	217.92
40	324.70	273.47	234.15	203.46
50	270.83	234.88	206.07	182.70
60	211.43	189.03	170.28	154.45
70	149.43	137.71	127.46	118.46

Significa por ejemplo para el primer caso, que una renta vitalicia de $1 mensual que se comienza a servir al mes siguiente de que una persona cumpla 50 años de edad equivale a un capital inicial de $270.83. Es evidente que si se mantiene la tasa de interés, ese capital disminuye a medida que se posterga el inicio de la renta, así por ejemplo para rentas vitalicias para personas de 70 años requieren un capital de $149.43.

El costo de una renta del mismo tipo, pero calculado a partir de tasas de mortalidad mensual, tendría la siguiente expresión, para una persona de edad z exacta en meses.

$$a^*_z = \frac{N^*_{z+1}}{D^*_z}$$

donde : - $D^*_z = l^*_z \cdot (1+i(12))^{-z}$

- $N^*_z = \sum_{j=z}^{j=w} [D^*_j]$ (SUMA)

Estamos ante una renta entera puesto que las variables básicas están referidas a un mismo período mensual. Por lo tanto la formulación es la tradicional para rentas enteras, pero con las particularidades de que las tasas de mortalidad l^*_z y de interés i(12) deben ser mensuales.

Los nuevos resultados que se han obtenido para las mismas situaciones planteadas anteriormente son:

Costo de una renta vitalicia mensual

Edad		tasa de interés		
En años	2%	3%	4%	5%
0	465.60	355.93	283.82	234.20
10	445.12	347.39	280.84	233.81
20	411.65	328.78	270.18	227.50
30	371.73	304.54	255.10	217.87
40	324.68	273.44	234.11	203.41
50	270.81	234.85	206.03	182.65
60	211.40	189.00	170.23	154.39
70	149.39	137.66	127.40	118.39

Si comparamos los resultados para los treinta y dos casos analizados podemos establecer que las diferencias son poco significativas, puesto que por ejemplo para personas de 0 y de 60 años nunca supera al 0,04%,y la máxima diferencia se da para personas de 70 años con una tasa de interés anual del 5% donde la diferencia es inferior al 0.06%.

En consecuencia, los cálculos basados en tasas de mortalidad mensuales llegan a resultados prácticamente iguales a los que se obtendrían aplicando la fórmula actuariales clásica sobre variables biométricas con apertura anual.

B) CONCORDANCIA DE LOS RESULTADOS PARA RENTAS TEMPORARIAS

Para realizar la comparación de resultados consideraremos rentas mensuales con un plazo de un año puesto que son las que proporcionan la mayor diferencia posible entre las rentas temporarias.

La expresión tradicional para el costo de una renta unitaria de este tipo es:

$$a^{(12)}_{x\,[1} = \left(\frac{Nx+1 - Nx+2}{Dx} + \frac{11}{24} \cdot \left(1 - \frac{Dx+1}{Dx} \right) \right) .12$$

Los resultados asociados al ejemplo que estamos analizando son los siguientes:

Costo de una renta temporal mensual				
Edad		tasa de interes		
En años	2%	3%	4%	5%
0	11.78	11.72	11.66	11.60
10	11.87	11.81	11.75	11.69
20	11.87	11.81	11.75	11.69
30	11.87	11.81	11.75	11.69
40	11.86	11.80	11.74	11.68
50	11.85	11.79	11.73	11.67
60	11.82	11.76	11.70	11.64
70	11.74	11.68	11.62	11.57

La expresión del costo para cuando trabajamos con tasas de mortalidad mensuales es:

$$a^*_{z\,[\,12} = \frac{N^*z{+}1 - N^*z{+}13}{D^*z}$$

Los resultados de aplicar la fórmula anterior al ejemplo sujeto a estudio son:

Costo de una renta temporal mensual				
Edad		Tasa de interes		
En años	2%	3%	4%	5%
0	11.74	11.68	11.62	11.56
10	11.87	11.81	11.75	11.69
20	11.87	11.81	11.75	11.69
30	11.87	11.80	11.74	11.68
40	11.86	11.80	11.74	11.68
50	11.85	11.79	11.73	11.67
60	11.82	11.76	11.70	11.64
70	11.74	11.68	11.62	11.56

Las mayores diferencias se dan para rentas temporarias con inicio a edad 0 donde los desajustes de niveles están comprendidos entre el 0.32% y 0.34%. Para los restantes casos, las diferencias son sensiblemente menores ya que la máxima no supera el 0.03%.

Por lo tanto, como estas diferencias son poco significativas, podemos afirmar que la apertura generada por el algoritmo es concordante, desde un punto de vista actuarial, con los resultados que se obtienen aplicando las fórmulas tradicionales, también para las rentas temporarias.

10. CONCLUSIONES

El objeto de la apertura mensual de las tasas de mortalidad anuales es permitir considerar los períodos fraccionarios en años de una forma más equitativa, desde un punto de vista actuarial, que la resultante de la aplicación de las fórmulas tradicionales.

El procedimiento seguido se basa en plantear una función que representa el logaritmo de la probabilidad de sobrevivencia anual, ponderada por factores dependientes de edades fraccionarias en años. Estos factores se definen de tal forma que se cumpla con la propiedad de continuidad, por la cual los valores de la función para edades fraccionarias límites deben coincidir.

El algoritmo planteado para la desagregación mensual de las tasas de mortalidad permite cumplir en última instancia con las propiedades de consistencia por la cual la probabilidad anual de sobrevivencia debe ser equivalente al producto de las probabilidades mensuales correspondientes.

La idea general es, que a partir de resultados sucesivos, se obtengan factores variables de ajuste, tal que multiplicados por la función precedente, permitan obtener una nueva función más consistente y continua. Este procedimiento puede ser repetido tantas veces como sea necesario hasta lograr el grado de ajuste deseado.

El planteo de la función inicial y la definición específica de los sucesivos factores, permite verificar que en todos los casos el algoritmo proporcionará resultados convergentes, en el sentido de que, por aplicación del algoritmo, se obtendrán tasas de mortalidades mensuales que cumplan tanto con las propiedades de continuidad como de consistencia.

No obstante, los resultados sólo pueden ser validados si se cumple adicionalmente la propiedad de concordancia, para ello será necesario comparar los resultados que proporcionaría la valoración de los costos actuariales de rentas contingentes que de esta apertura se pueden derivar para edades exactas en años, con los que se obtendrían de aplicar las fórmulas clásicas sobre las tasas de mortalidad anuales.

Una de las ventajas de este algoritmo es que puede ser fácilmente aplicado mediante la utilización de planillas electrónicas, Además como es muy potente, por lo general la convergencia final se logra luego de pocas iteraciones.

Otra ventaja de trabajar con esta apertura es que se pueden resolver situaciones muchos más específicas. En efecto, se pueden calcular en forma directa los costos de seguros diferenciales según la edad en meses de las personas afectadas por las rentas contingentes. Inclusive, se pueden valorar rentas con cuotas y tasas de interés mensualmente variables.

APENDICE

CARACTERÍSTICAS DE $K^{(n)}_x$

Plantearemos seguidamente las expresiones que permiten comparar dos valores sucesivos de $K^{(n)}_x$:

Por definición, son válidas las siguientes formulaciones:

$$K^{(n)}x = LN(1 - q_x) \Big/ \underset{y=0}{\overset{y=11}{SUMA}} [F^{(n-1)}_{xy} * H^{(n-2)}_{xy}]$$

y

$$K^{(n-1)}x = LN(1 - q_x) \Big/ \underset{y=0}{\overset{y=11}{SUMA}} [H^{(n-2)}_{xy}]$$

Por lo tanto:

(9) $K^{(n)}_x = K^{(n-1)}_x \,/\, FF^{(n-1)}_{(x-1,x,x+1)}$ donde

(10) $$FF^{(n-1)}_{(x-1,x,x+1)} = \underset{y=0}{\overset{y=11}{SUMA}} [F^{(n-1)}_{xy} \,.\, \beta_{xy}]$$ con

$$\beta_{xy} = H^{(n-2)}_{xy} \Big/ \underset{y=0}{\overset{y=11}{SUMA}} [H^{(n-2)}_{xy}]$$

$$0 <= \beta_{xy} <= 1 \text{ y } \underset{y=0}{\overset{y=11}{SUMA}} [\beta_{xy}]_{=1}$$

Por los valores de $\beta_{xy,}$ $FF^{(n-1)}_{(x-1,x,x+1)}$ es un promedio ponderado de las $F^{(n-1)}_{xy}$, quienes a su vez son promedios $K^{(n-1)}_{x-1,}$ $K^{(n-1)}_x$ y $K^{(n-1)}_{x+1.}$ Por lo tanto, podemos afirmar que las $FF^{(n-1)}_{(x-1,x,x+1)}$ serán también un promedio de las $K^{(n-1)}_{x-1,}$ $K^{(n-1)}_x$ y $K^{(n-1)}_{x+1}$.

Por tal condición de promedio FF cumple las siguientes dos propiedades:

- es mayor o igual que el mínimo de los K promediados.

(11) $FF^{(n-1)}_{(x-1,x,x+1)} >= \text{mínimo}\,(K^{(n)}_{x-1,}\, K^{(n)}_{x}\,,\, K^{(n)}_{x+1})$

- es menor o igual que el máximo de los K promediados.

(12) $FF^{(n-1)}_{(x-1,x,x+1)} <= \text{máximo}\,(K^{(n)}_{x-1,}\, K^{(n)}_{x}\,,\, K^{(n)}_{x+1})$

A partir de estos resultados, plantearemos tres propiedades de $K^{(n)}_x$ y un corolario.

Dada una iteración n, el valor mínimo de $K^{(n)}_x$ para todo "x" es positivo y no superior a 1.

Supongamos que el mínimo de $K^{(n)}_x$ se da para x = m_n , por lo que es posible plantear:

$$K^{(n)}m_n \;=<\; K^{(n)}_x \quad \text{para } x= 1,2,3,....w$$

Además por (9), $K^{(n)} m_n = K^{(n-1)} m_n \;/\; FF^{(n-1)} (m_n-1, m_n, m_n+1)$

Por otra parte como por (11), $FF^{(n-1)} (m_n-1, m_n, m_{n+}1) >= K^{(n-1)} m_n$ se cumple que:

$$K^{(n)} m_n =< 1$$

Tener presente además que todos los valores $K^{(n)}_x$ son mayores que 0, ya que se parten de valores iniciales $K^{(0)}_x > 0$ y en las iteraciones posteriores los $K^{(i)}_x$ se obtienen a partir de cocientes de expresiones también positivas.

Dada una iteración n, el valor máximo de de $K^{(n)}_x$ es no inferior a 1.

Supongamos que el máximo de $K^{(n)}_x$ se da para x = M_n , por lo que:

$$K^{(n)}_{Mn} \;>=\; K^{(n)}_x \quad \text{para } x= 1,2,3,....w$$

Además por (9), $K^{(n)}_{Mn} = K^{(n-1)}_{Mn} \;/\; FF^{(n-1)} (_{Mn} -1, _{Mn}, _{Mn} +1)$

Por otra parte como por (12), $FF^{(n-1)} (_{Mn} -1, _{Mn}, _{Mn\,+}1) =< K^{(n-1)}{}_{Mn}$ se cumple :

$$K^{(n)}_{Mn} >= 1$$

El cociente $K^{(n)}{}_{Mn} / K^{(n)}m_n$ tiende a 1.

La propiedad puede ser expresada bajo la siguiente forma:

$$K^{(n)}{}_{Mn} / K^{(n)} m_n \; - \; 1 \quad =< \varepsilon \qquad (\varepsilon>0)$$

para $n > N$

La que puede ser verificada demostrando que $K^{(n)}M_n / K^{(n)}m_n$ es monótona decreciente, con un valor mínimo de 1.

A partir (9), podemos plantear:

$$K^{(n)}_{Mn} / K^{(n)}m_n = K^{(n-1)}{}_{Mn} / \left(FF^{(n-1)}(_{Mn} -1, _{Mn}, _{Mn\,+}1) \ast K^{(n)} m_n \right)$$

y $K^{(n)} m_n = K^{(n-1)}m_n / FF^{(n-1)} (m_n-1, m_n, m_{n+}1)$

por lo tanto:

(13) $$K^{(n)}{}_{Mn} / K^{(n)}m_n = \frac{(K^{(n-1)}{}_{Mn} / K^{(n-1)}m_n)}{FF^{(n-1)}\,(_{Mn}\,-1,\ _{Mn},\ _{Mn\,+}1)\ /\ FF^{(n-1)}\,(m_n-1,\ m_n,\ m_{n+}1)}$$

Como $K^{(n)}\ m_n$ es el valor mínimo de $K^{(n)}{}_x$ para la iteración :

$$K^{(n)}\ m_n \ =<\ K^{(n)}\ m_{n-1}$$

Lo que de acuerdo a (9), es equivalente a:

(14) $$\frac{K^{(n-1)}\ m_n}{FF^{(n-1)}\,(m_n-1,\ m_n,\ m_{n+}1)} \quad =< \quad \frac{K^{(n-1)}\ m_{n-1}\,)}{(\ FF^{(n-1)}\,(m_{n-1}-1,\ m_{n-1},\ m_{n-1+}1)}$$

Respecto al valor $K^{(n)}\ _{Mn}$ sabemos que al ser el máximo de los x, se cumple que :

$$K^{(n)}\ _{Mn} >= \ K^{(n)}\ _{Mn-1}$$

Que por (9), equivale a:

(15) $$\frac{K^{(n-1)}{}_{Mn}}{(\ FF^{(n-1)}\,(_{Mn}\,-1,\ _{Mn},\ _{Mn\,+}1)} \quad >= \quad \frac{K^{(n-1)}{}_{Mn-1}}{(\ FF^{(n-1)}\,(_{Mn-1}\,-1,\ _{Mn-1},\ _{Mn-1\,+}1)}$$

Sustituyendo en (13) los resultados de (14) y (15), obtenemos la siguiente relación:

(16)

$$K^{(n)}{}_{Mn} / K^{(n)}\ m_n =< \frac{K^{(n-1)}{}_{Mn-1} / K^{(n-1)}\ m_{n-1}\,)}{FF^{(n-1)}\,(_{Mn-1}\,-1,\ _{Mn-1},\ _{Mn-1\,+}1)\ /\ (\ FF^{(n-1)}\,(m_{n-1}-1,\ m_{n-1},\ m_{n+1+}1)}$$

Para que $K^{(n)}{}_{Mn} / K^{(n)}\ m_n$ sea monótona decreciente es necesario que:

$$K^{(n)}{}_{Mn} / K^{(n)}\ m_n \ < K^{(n-1)}{}_{Mn-1} / K^{(n-1)}\ m_{n-1}$$

De acuerdo con (16) para que este relación se cumpla, se debe verificar que:

(17) $$FF^{(n-1)}\,(m_{n-1}-1,\ m_{n-1},\ m_{n-1+}1) < \quad FF^{(n-1)}\,(_{Mn-1}\,-1,\ _{Mn-1},\ _{Mn-1\,+}1)$$

A continuación analizaremos las condiciones bajo las cuales la relación anterior es válida.

A tales efectos, si se tiene en cuenta que el término de la derecha de (9) es un promedio de $K^{(n-1)}(m_{n-1}-1)$, $K^{(n-1)}{}_{(}m_{n\,-1)}$ y $K^{(n-1)}{}_{(}m_{n\ -}\ 1_{)}$, y el término de la izquierda es un promedio de $K^{(n-1)}\ (_{Mn\,-1}\,-1)$, $K^{(n-1)}\ (_{Mn\,-1})$ y $K^{(n-1)}\ (_{Mn\,-1}\,+1)\ _{,}$ se puede apreciar que se cumplen las dos siguientes relaciones:

$$FF^{(n-1)}\,(m_{n-1}-1,\ m_{n-1},\ m_{n-1+}1) \quad =< FF^{(n-1)}\,(_{Mn-1},\ m_{n-1},\ _{Mn-1})$$

porque $K^{(n-1)}\ (_{Mn\,-1})$ es el máximo de los $K\ ^{(n-1)}$

$$FF^{(n-1)}\ ({}_{Mn-1}\ -1,\ {}_{Mn-1},\ {}_{Mn-1\ +}1)\quad >=\ FF^{(n-1)}\ (m_{n-1}\ ,\ {}_{Mn-1},\ m_{n-1}\ )$$

porque $K^{(n-1)}\ (m_{n-1})$ es el mínimo de los $K^{(n-1)}$

Téngase presente que por (10) podemos plantear:

$$FF^{(n-1)}({}_{Mn-1},\ m_{n-1},\ {}_{Mn-1})\ = \sum_{y=0}^{y=11} \left[\ F^{(n-1)}m_{n-1,\ y}\ .\ \chi_{xy}\right]$$

$$FF^{(n-1)}(m_{n-1}\ ,\ {}_{Mn-1},\ m_{n-1}\ )\ = \sum_{y=0}^{y=11} \left[\ F^{(n-1)}{}_{Mn-1,\ y}\ .\ \delta_{xy}\ \right]$$

Con χ_{xy} y δ_{xy} cumpliendo las propiedades similares a las impuestas a β_{xy} en (10).

En este caso particular, se verificarán las siguientes relaciones:

$$F^{(n-1)}{}_{Mn-1,\ y}\ =\ (\ (K^{(n-1)}{}_{Mn-1})^{(y+6)/12}\ )\ .\ (\ (K^{(n-1)}\ m_{n-1})^{(6-y)/12}\ )\quad \text{para}\quad 0<=y<=6$$

$$=\ (\ (K^{(n-1)}{}_{Mn-1})^{(18-y)/12}\ )\ .\ (\ (K^{(n-1)}\ m_{n-1})^{(y-6)/12}\ )\quad \text{para}\quad 6<=y<=12$$

$$F^{(n-1)}m_{n-1,\ y}=\ (\ (K^{(n-1)}\ m_{n-1})^{(y+6)/12}\ )\ .\ (\ (K^{(n-1)}{}_{Mn-1})^{(6-y)/12}\ )\quad \text{para}\quad 0<=y<=6$$

$$=\ (\ (K^{(n-1)}\ m_{n-1})^{(18-y)/12}\ )\ .\ (\ (K^{(n-1)}{}_{Mn-1})^{(y-6)/12}\ )\quad \text{para}\quad 6<=y<=12$$

Es fácilmente apreciable que para todo y (=0,1,..,11) se verifican las dos siguientes relaciones:

$$F^{(n-1)}\ M_{n-1y}\ >=\ K^{(n-1)}\ m_{n-1}{}^{1/2}\ .\ K^{(n-1)}\ M_{n-1}{}^{1/2}\quad y$$
$$F^{(n-1)}\ m_{n-1y}\ <=\ K^{(n-1)}\ m_{n-1}{}^{1/2}\ .\ K^{(n-1)}\ M_{n-1}{}^{1/2}$$

Por lo tanto se cumple la siguiente propiedad:

$$FF^{(n-1)}\ ({}_{Mn-1}\ -1,\ {}_{Mn-1},\ {}_{Mn-1\ +}1)\quad >=$$
$$>=\quad K^{(n-1)}\ m_{n-1}{}^{1/2}\ *\ K^{(n-1)}\ M_{n-1}{}^{1/2}\quad >=$$
$$>=\quad FF^{(n-1)}\ (m_{n-1}-1,\ m_{n-1},\ m_{n-1+}1)$$

Por la definición de FF , el único caso en que se puede dar la igualdad entre los tres miembros de la propiedad anterior es cuando $K^{(n-1)}\ m_{n-1} = K^{(n-1)}\ M_{n-1}$. Ello es posible sólo cuando ambos sean iguales a 1 puesto que, por lo demostrado anteriormente, $K^{(n-1)}\ m_{n-1} =< 1$ y $K^{(n-1)}\ M_{n-1}>=1$.

En tal caso será necesario que todos los valores sean también iguales a 1, es decir:

$$K^{(n-1)}{}_x\ =\ 1\qquad x=0,1,2,...$$

Cuando $K^{(n-1)}\ M_{n-1} > K^{(n-1)}\ m_{n-1}$ se debe verificar que:

$$FF^{(n-1)}\ M_{n-1}\ >\quad FF^{(n-1)}\ m_{n-1}$$

lo que asegura el cumplimiento de la tesis de decrecimiento del cociente entre el máximo y el mínimo de K de cada iteración, que es la propiedad que se quería demostrar.

Las sucesión de $K^{(n)}_x$ tiende a uno para todo x.

Esta propiedad es un corolario de las anteriores. Como en el cociente $K^{(n)}_{Mn}$ / $K^{(n)}m_n$ está compuesto por un numerador no inferior a uno y un denominador no negativo y no superior a uno, para que tienda a uno, la única posibilidad es que ambos componentes tiendan también a uno.

Si $K^{(n)}_{Mn}$ y $K^{(n)}m_n$ tienden a uno, los demás $K_x^{(n)}$ necesariamente deben también tender a uno, cualquiera sea el x considerado.