

**LA TASA DE INTERÉS TÉCNICO ACTUARIAL  
ASOCIADA A UN SISTEMA DE  
CAPITALIZACIÓN COMPLETA  
CON PRIMA ÚNICA**

Cr. Luis Camacho

---



## LA TASA DE INTERÉS TÉCNICO ACTUARIAL ASOCIADA A UN SISTEMA DE CAPITALIZACIÓN COMPLETA CON PRIMA ÚNICA

### INTRODUCCION

Una visión sobre el financiamiento de los regímenes de Seguridad Social se basa en la consideración conjunta de los ingresos y egresos como elementos de equilibrio financiero global del régimen. Desde este punto de vista resulta sustancial comprender el concepto del denominado “sistema financiero”, que puede ser esquematizado como el método por el cual se asignan fondos para proporcionar prestaciones de forma de obtener el equilibrio financiero en un horizonte de tiempo prefijado.

Al respecto, considerando regímenes de cobertura de riesgos de largo plazo, cabe establecer que existen dos tipos de sistemas básicos: el de financiación individual y el de financiación colectiva. En el primer caso interesa evaluar exclusivamente el equilibrio entre contribuciones y prestaciones asociadas a cada persona independientemente de las restantes. En el segundo, cuando consideramos la financiación colectiva, se pueden visualizar diversas generaciones participantes que se interrelacionan a través del sistema de la siguiente forma:

- 1) Cotizantes activos que realizan sus aportes a un fondo común.
- 2) Beneficiarios que pueden ser de diversas generaciones de afiliados activos del pasado.
- 3) El sistema opera como se ve en el gráfico, a través de la interacción de las dos categorías de participantes:



El fondo común tiene como recursos los aportes de sus afiliados activos y el producido de las inversiones y como egresos las prestaciones que se otorgan a sus beneficiarios.

Cuanto mayor sea el fondo común, menor será la dependencia de una generación con otra, el caso extremo se presenta con sistema de capitalización en el que están completamente financiadas las prestaciones futuras de las diversas generaciones con los aportes de efectuados por ellas mismas.

Sin embargo, cuando su nivel baja, la dependencia intergeneracional se acrecienta, pudiéndose llegar al sistema de reparto donde el fondo es prácticamente nulo, en

cuyo caso las prestaciones a los beneficiarios actuales dependerán fuertemente de los recursos por aportes concomitantes.

Por ello, en los sistemas de financiación colectiva, la ecuación básica de equilibrio global se basa en la igualdad entre ingresos y egresos en un horizonte de tiempo prefijado así, mientras para un sistema de capitalización completa el período en el que se verifica el equilibrio es muy significativo, para un sistema de reparto el equilibrio entre ingresos y egresos es anual, existiendo casos en que el período es menor, por ejemplo mensual.

Por lo expuesto, para el sistema de reparto importa especialmente la tasa de expansión que pueda tener el sistema de financiación colectiva a través de sus variables demográficas. Mientras que para el sistema de capitalización completa las rentas de capital alcanzan especial importancia, como fuentes de financiación.

El objetivo del presente análisis, es plantear una expresión que permita explicitar la tasa de interés técnico por unidad de tiempo asociada al sistema de capitalización completa con prima única, la que servirá de base para la aplicación de los factores de descuento de los flujos de fondos asociados.

Previamente se expondrán en forma breve los supuestos básicos implícitos en los modelos a utilizar y algunos resultados sobre las tasas de rentabilidad de los sistemas de financiación individual y de reparto simple de gastos.

## **SUPUESTOS BASICOS**

Los modelos que se analizan a continuación representan como en todos los casos una simplificación de la realidad sujeta a estudio, por lo que resulta imprescindible destacar las hipótesis más significativas bajo las cuales fueron desarrollados. En tal sentido podemos establecer:

- Se supone una única edad para el inicio de la actividad y una edad única de inicio de la jubilación.
- Existe una movilidad salarial variable por edad, pero que permanece invariable en el horizonte de análisis.
- Las tasas de mortalidad por edad son invariables en el horizonte de análisis.
- Se excluyen del análisis las contribuciones y prestaciones asociadas a los riesgos de invalidez y muerte.

En los regímenes de financiación colectiva, se evalúa asimismo la evolución del número de altas de cotizantes por año, aún cuando esta puede no tener un crecimiento constante en el tiempo. Asimismo, se supone que todos los nuevos cotizantes tienen idéntico salario de ingreso.

## TASA DE APORTE DE EQUILIBRIO INDIVIDUAL

El equilibrio financiero individual<sup>1</sup> se logra con la igualdad de los valores actualizados de las cotizaciones y de las jubilaciones asociados a una persona desde el inicio de las aportaciones hasta la finalización de la renta vitalicia por concepto de jubilación, por lo que debe cumplirse, en este caso, la siguiente expresión:

$$TMC * SMC * TCI * (1+i_s)^{-ECC} = TMJ * SMBJ * TR * (1+i_s)^{-ECJ}$$

El primer miembro de la ecuación representa el valor actualizado de las contribuciones individuales y el segundo el de las prestaciones. La tasa de contribución TCI es la variable que permite obtener el equilibrio financiero, puesto que suponemos un sistema de prestaciones definidas.

En cuanto la notación utilizada podemos establecer que TMC y TMJ representan los tiempos medios de cotizaciones y jubilaciones, SMC y SMBJ los sueldos medios de cotización y básico jubilatorio; TCI y TR las tasas de contribución y de reemplazo; ECC y ECJ las edades centrales de cotización y jubilación respectivamente. A efectos de aclarar este planteo, en el anexo 1 se realiza un desarrollo de las principales funciones utilizadas.

Al considerar un sistema de prestaciones definidas, la variable de ajuste será la Tasa de Contribución (TCI), por lo que corresponde que despejemos TCI de la expresión anterior, por lo que:

$$TCI = \frac{SMBJ * TR * TMJ}{SMC * TMC} * (1+i_s)^{(ECC-ECJ)} \quad [1]$$

La tasa de cotización de equilibrio depende entonces, de una relación económica entre el nivel de la jubilación promedio y el sueldo medio de actividad, una relación demográfica entre el tiempo medio de jubilación y el de cotización, y un factor financiero en el que inciden tanto la tasa de interés real sobre salarios considerada en el análisis así como la diferencia entre la Edad Central de Jubilación y la de Cotización, que representa el período en el que se recuperarían en promedio los aportes.

Es importante tener presente que “ $i_s$ ” es la tasa de interés real sobre salarios vigente en todo el horizonte de análisis. Si se supone constante, serán también invariables las siguientes dos tasas que son las que permiten calcular a “ $i_s$ ” de la siguiente forma:

$$(1 + i_s) = (1+i) / (1+s)$$

<sup>1</sup> Luis Camacho. “Explicitación de las variables que intervienen en el equilibrio financiero individual de un sistema jubilatorio con prestación definida” Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No. 7 (abril-junio 2005)

donde la "i" es la tasa de interés nominal aplicable a inversiones en pesos corrientes y "s" es la tasa de crecimiento salarial en la unidad de tiempo.

A efectos de visualizar más claramente los resultados anteriores, planteamos a continuación un ejemplo en el cual consideramos sólo tramos decenales de edad, que nos permitirá visualizar los diferentes factores intervinientes en el cálculo de las cotizaciones.

Las características del caso a analizar son las siguientes:

La edad de inicio de la actividad 20 años y retiro 70. El sueldo mensual inicial es de 60.000, que crece anualmente por efecto de los ascensos y promociones (movilidad vertical) resultando los niveles que figuran en la columna II del cuadro I.

La probabilidad de supervivencia, calculada a partir de la edad de 20 años, se muestra en la columna III del cuadro I.

La tasa de interés real sobre la evolución salarial es del 20% decenal.

**Cuadro I - Computo de los Valores Actuales de Cotización**

I Edad	II 60000* (1+m(20,j))	III I <sub>j</sub> / I <sub>ei</sub>	IV (1+i(s)) <sup>-j+ei</sup>	V producto I II*III*IV	VI Producto II II*III
20	60000	1	1	60000	60000
30	72000	0.9	0.8333	54000	64800
40	78000	0.8	0.6944	43333	62400
50	84000	0.7	0.5787	34028	58800
60	90000	0.6	0.4822	26042	54000
SUMAS		4.0		217403	300000

En las últimas filas del cuadro se pueden visualizar los totales acumulados de las diferentes columnas, pero interesa en particular considerar los guarismos asociados las sumas de la columna III, V y VI, que están asociadas a las siguientes expresiones;

$$\text{Suma Columna III} = \sum_{j=2}^{j=6} (I_j/I_2) = 4$$

$$\text{Suma Columna V} = \sum_{j=2}^{j=6} 60000 * (1 + m(2,j)) * (I_j/I_2) * [(1+i(s))^{-j+2}] = 217403$$

$$\text{Suma Columna VI} = \sum_{j=2}^{j=6} 60000 \cdot (1 + m(2,j)) \cdot (I_j / I_{x_0}) = 300000$$

Tener presente que la unidad de tiempo es la década por lo que las edades “j” deben ser visualizada en tal dimensión.

Con los resultados finales del cuadro podemos estimar la Edad Central de Cotización, por lo que tengamos en cuenta que se cumple:

$$1 / (1 + 0.20)^{\text{ECC} - 2} = \text{Suma Columna V} / \text{Suma Columna VI} = 0.724675926.$$

si despejamos **ECC** llegamos a que su valor es igual a **3.766** si lo expresamos en décadas.

**El Sueldo Medio de Cotización, es igual a:**

$$\text{SMC} = \text{Suma Columna VI} / \text{Suma Columna III} = 75000$$

El tiempo medio de cotización es de:

$$\text{TMC} = \text{Suma Columna III} = 4 \text{ décadas}$$

El tiempo medio de cotización nos indica la cantidad de décadas que en promedio existirán cotizaciones, teniendo en cuenta que a consecuencia de la mortalidad es posible el fallecimiento prematuro del titular.

Continuamos analizando el ejemplo, con el agregado de que suponemos que el sueldo básico jubilatorio se obtiene promediando los sueldos de toda la vida laboral actualizados por la variación del índice general de salarios. Este índice también sirve para revalorizar las jubilaciones en curso de pago. Además suponemos que la tasa de reemplazo a aplicar sobre el sueldo básico jubilatorio es del 60%. En el cuadro II figuran las probabilidades de supervivencia para las edades jubilatorias.

En el siguiente cuadro tenemos los datos más importantes para el cálculo del costo de la jubilación:

Cuadro II - Compuo de los Valores Actuales de Jubilación

Edad	$I_j / I_{ei}$	$(1+i(s))^{-j \cdot ei}$	producto I II*III IV
I	II	III	IV
70	0.5	0.40188	0.20
80	0.4	0.33490	0.13
90	0.1	0.27908	0.03
Sumas	1		0.36

En la segunda columna figuran las probabilidades de sobrevivencia, calculadas a partir de la edad de inicio de la actividad (20 años). En la tercera, los factores de actualización de los flujos de fondos a la edad de inicio de la actividad. La cuarta es el producto de las dos anteriores.

En la última fila encontramos la suma de las columnas II y IV que están asociados a las siguientes expresiones:

$$\text{Suma Columna II} = \sum_{j=7}^{j=9} (I_j / I_{ei}) = 1 \text{ década}$$

$$\text{Suma Columna IV} = \sum_{j=7}^{j=9} (I_j / I_{ei}) \cdot [1 / (1 + i_s)^{(2-j)}] = 0.36$$

Podemos ahora calcular la Edad Central de Jubilación, para ello tengamos en cuenta que:

$$1 / (1 + 0.2)^{ECJ-2} = \text{Total 2} / \text{Total 1} = 0.36.$$

Despejando, **ECJ** de la expresión anterior llegamos al siguiente valor: **7.56** décadas.

El Sueldo Medio Básico de Jubilación es igual al de Cotización por la forma de actualización de los salarios y pasividades y porque se promedian los sueldos de toda la vida laboral, por lo tanto:

$$\text{SMBJ} = \text{SMC} = 75000$$

El tiempo medio de jubilación es igual a:

$$\text{TMJ} = \text{Suma Columna II} = \underline{\underline{1 \text{ década}}}$$

Entonces, considerando que en este caso la tasa de reemplazo es del 60%, podemos hallar el nivel de la tasa de contribución de equilibrio;

$$\text{TCI} = \frac{75000 \cdot 0.6}{75000} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1.2^{-3.7947} = 0.075$$

En este caso se puede apreciar que tiene una importante incidencia el último factor financiero ya que como el período de recuperación (diferencia entre la Edad Central de Jubilación y la de Cotización) es más de 37.9 años, alcanza un valor aproximado a 0.5 en la determinación de la tasa de cotización.

## TASA DE APOORTE DE UN SISTEMA DE REPARTO

Si tenemos en cuenta el principal resultado del análisis realizado recientemente sobre la tasa de rentabilidad de un sistema de reparto<sup>2</sup>, se puede apreciar que la expresión final para la tasa de contribución de equilibrio de un sistema reparto con las características que hemos definido será la siguiente:

$$TCR = \frac{TMJ}{TMC} * \frac{SMBJ.TR}{SMC} * (1+c)^{ECC-ECJ} \quad [2]$$

Donde "c" es la tasa de crecimiento promedio anual del número de altas de cotizantes en el período comprendido entre las Edades Centrales de Cotización y de Jubilación. A esta tasa la denotaremos como **tasa de expansión** del sistema de financiación colectiva.

Téngase presente que los resultados de la tasa de contribución del sistema de reparto, permiten inferir dos tipos de equilibrios. El individual de un afiliado que recién se integra al sistema de reparto y el global en el que se equilibran los ingresos y egresos de un año futuro del sistema de reparto, que más adelante especificaremos.

Para verificar este doble equilibrio, denotemos el valor futuro de las cotizaciones y prestaciones esperadas, a la edad ef de un afiliado individual que inicia su actividad a la edad ei, como VFPI (Valor Futuro de las Cotizaciones Individuales) y VFPI (Valor Futuro de las Prestaciones Individuales) respectivamente.

Las expresiones asociadas a ambos casos se pueden obtener a partir de los valores actuales de las cotizaciones y prestaciones<sup>3</sup>:

$$VFPI = \sum_{j=ei}^{j=er-1} [ S_j * TCR * I_j / I_{ei} * (1 + c(j,e_i)) ] \quad [5]$$

$$VFPI = \sum_{j=er}^{j=ef} [ JR_j * I_{ei} * (1 + c(j,e_i)) ] \quad [6]$$

Consideremos las siguientes expresiones que denotamos como VCR (Valor de las Cotizaciones del Sistema de Reparto) y VPR (Valor de las Prestaciones del Sistema de Reparto).

---

<sup>2</sup> Luis Camacho: "Análisis de la tasa de rentabilidad implícita en el equilibrio financiero de un sistema de reparto". Banco de Previsión Social. Comentarios de la Seguridad Social No 10.

<sup>3</sup> Luis Camacho. "Explicitación de las variables que intervienen en el equilibrio financiero individual de un sistema jubilatorio con prestación definida" Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No. 7 (abril-junio 2005)

$$VCR = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} [ A_j * I_j / I_{ei} * S_j * TC ] \quad [7]$$

$$VPR = \sum_{j=e_r}^{j=e_f} [ A_j * I_j / I_{ei} * JR_j ] \quad [8]$$

En el anexo 2, se desarrollan las funciones que permiten justificar el planteo anterior.

Si se tiene en cuenta además que se cumple;

$$A_j = A_{ef} * (1 + c(j, e_r)) \quad [9]$$

podemos establecer que las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} VCR &= VFCl * A_{ef} \\ VPR &= VFPI * A_{ef} \end{aligned}$$

En consecuencia, la persona para la cual se evalúa el equilibrio financiero individual es un afiliado al régimen de reparto, con la particularidad de que la tasa de descuento implícita es a la vez la que se debe considerar en el equilibrio global del sistema.

Como se ha establecido precedentemente, existen dos tipos de equilibrios financieros que están ligados, el del régimen de reparto y el asociado a un afiliado tipo integrante de ese régimen. Sin embargo, los instantes donde se visualizan esos equilibrios son diferentes, por lo que es de interés especificarlos:

- El equilibrio financiero individual de aportes y prestaciones esperadas se evalúa para quien ingresa al sistema en el año cero  $x(0)$ . El horizonte de análisis es igual a la diferencia entre la edad final ( $ef$ ) de la tabla de mortalidad y la edad de inicio de la actividad ( $ei$ ).
- El equilibrio financiero del sistema de reparto analizado corresponde al año final del horizonte de análisis, es decir " $x(ef-ei)$ ". Allí se computan los ingresos y egresos, asociados a todos los afiliados que son supérstites de quienes ingresaron al sistema en el período considerado.

De lo expuesto se desprende que si por ejemplo hoy computamos el equilibrio financiero para una afiliado de edad  $ei$  (inicio de la actividad), que comprende toda su vida laboral y de jubilado, la tasa de interés técnico actuarial asociada se obtendría de promediar el crecimiento de las altas de cotizantes de un período que depende de la Edad Central de Cotización y la Edad Central de Jubilación.

Por lo tanto, esta tasa está asociada a la expansión promedio que se espera en el sistema de financiación colectiva a consecuencia del crecimiento del número anual de las altas de cotizantes.

A los efectos de visualizar más claramente lo expuesto, consideremos el ejemplo anterior con el agregado de que estamos analizando un sistema de reparto, con una tasa de crecimiento promedio del 5% decenal del número de altas de cotizantes.

Operando de idéntica forma que anteriormente pero sustituyendo la tasa del 20% por la del 5%, obtenemos los siguientes resultados finales:

$$TCR = \frac{75000 * 0.6}{75000} * \frac{1}{4} * 1.05^{3.696} = 0.1252$$

Donde el período de recuperación de 3.696 décadas, surge de la diferencia de la Edad Central de Jubilación (7.589) y la Edad Central de Cotización (3.893), calculada para este caso.

### **GENERALIZACIÓN DE LAS FORMULAS PARA UN SISTEMA DE CAPITALIZACIÓN COMPLETA**

El análisis anterior respecto a la equivalencia entre los equilibrios individuales y globales de integrantes del sistema de reparto, puede ser ampliado para el caso de un sistema de capitalización completa de un régimen de financiación colectiva. En especial si se tiene en cuenta que partiendo desde un año inicial en el que nos encontramos con un sistema de capitalización completa, para que ella se mantenga, necesariamente se deberían verificar equilibrios financieros asociados a los nuevos afiliados.

En tal sentido, es preciso tener presente que las expresiones [5] y [6] que representan el valor futuro, a la edad  $e_f$  de las cotizaciones y prestaciones esperadas, asociadas a un afiliado individual, que denotamos como VFPI (Valor Futuro de las Prestaciones Individuales) y VFPI (Valor Futuro de las Prestaciones Individuales) son válidas sólo en el caso que la tasa de interés de las colocaciones financieras del sistema sea considerada nula por efecto de que opera sin capital. Como para este sistema no existen recursos provenientes de colocación de fondos, es válido suponer la nulidad de la tasa de interés financiera asociada.

Cuando consideramos un régimen de capitalización completa la tasa de rentabilidad asociada a la inversión de los fondos disponibles, es de fundamental importancia ya que los intereses constituyen una importante fuente de financiamiento. Por lo tanto, en el caso de capitalización completa, los flujos de fondos implícitos en las expresiones [5] y [6], para ser comparables, deben ser afectados por factores de actualización en los que la tasa de interés tenga especial significación. Desde un punto de vista financiero, el valor futuro de ingresos y egresos futuros, ante un régimen de capitalización completa y de financiación colectiva, debería ser planteado respectivamente de la siguiente forma:

$$VFPI = \sum_{j=ei}^{j=ef-1} [ S_j * TCC * I_j / I_{ei} * (1 + c(j, e_f)) ] * (1+i_s)^{(j-ef)} \quad [10]$$

$$VFPI = \sum_{j=er}^{j=ef} [JR_j * I_j / I_{ei} * (1 + c(j, e_f))] * (1 + i_s)^{(j-er)} \quad [11]$$

Se destaca que es válido partir de [5] y [6] para el planteo anterior puesto que el sistema es de financiación colectiva, y por ende se debe computar en el cálculo de los equilibrios la incidencia de la expansión demográfica del sistema.

Vemos entonces, que en ambas expresiones no sólo tienen importancia las tasas de crecimiento del número de cotizantes, sino que al estar el régimen completamente financiado, los factores de actualización deben estar compuesto además por la tasa de interés real al cual se pueden colocar los fondos del sistema.

Téngase presente que [10] y [11] constituyen un caso general que comprende a [5] y [6] ya que coinciden cuando  $i_s = 0$ . Lo que ratifica nuestra afirmación anterior de que en un sistema de reparto, al no tener ingresos por intereses, a consecuencia de la falta de capital, es posible suponer que la tasa de interés de las colocaciones financieras para ese sistema sea nula.

Por supuesto, si consideramos que los sistemas son de iguales prestaciones, las diferencias se pueden visualizar a través de las tasas de contribuciones, que denotamos para el caso del sistema de reparto por TCR y para el de capitalización completa TCC.

Definamos ECC y ECJ de forma tal que se cumplan las siguientes dos expresiones:

$$VFCI = \sum_{j=ei}^{j=er-1} [S_j * TCC * I_j / I_{ei}] * (1 + c(j, ECC)) * (1 + i_s)^{(j-ECC)} \quad [12]$$

$$VFPI = \sum_{j=er}^{j=ef} [JR_j * I_j / I_{ei}] * (1 + c(j, ECJ)) * (1 + i_s)^{(j-ECJ)} \quad [13]$$

Se puede apreciar nuevamente que son similares a las asociadas al régimen de reparto, cuando consideramos  $i_s$  nulo.

Si igualamos [12] y [13], y realizamos simples operaciones algebraicas llegaremos al siguiente resultado final, en el que se expresa la tasa de contribución de un sistema de capitalización en los mismos términos que a la asociada al sistema de reparto:

$$TCC = \frac{TMJ}{TMC} * \frac{SMBJ * TR}{SMC} * [(1 + c) * (1 + i_s)]^{(ECC-ECJ)} \quad [14]$$

La diferencia sustancial está dada por el último factor, en el que figura la tasa de interés de las colocaciones del capital del sistema.

Ese factor es el que permite definir el interés técnico actuarial anual para el sistema de capitalización completa de un sistema de financiación colectiva como:

$$i_c = (1+c)^*(1+i_s) - 1 \quad [15]$$

Como se puede apreciar, depende de la tasa de expansión del sistema de financiación colectiva y de la tasa de interés real sobre salarios a la cual se puede invertir el capital.

Se destaca que otra diferencia en las expresiones de TCC y TCR, aún cuando de menor importancia, está dada en las Edades Centrales de Cotización y de Jubilación, ya que para su cálculo, en ambos casos su valor se obtiene a partir de formulaciones levemente diferentes.

Considerando el ejemplo anterior con una tasa de interés técnico actuarial decenal del 26% que surge de la siguiente expresión:

$$i_c = (1.05)^*(1.20) - 1 = 0.26$$

Por lo que la nueva tasa acumula los crecimientos demográficos y financieros considerados en las dos situaciones anteriores.

En este caso, llegamos a los siguientes resultados:

$$TCC = \frac{75000 * 0.6 * \frac{1}{4} * 1.26^{-3.83}}{75000} = 0.0619$$

Con un período de recuperación de 3.83 décadas, que surge de la diferencia de la Edad Central de Jubilación (7.551) y la Edad Central de Cotización (3.721).

### INCIDENCIA DE LOS PERIODOS DE RECUPERACION

Como se aprecia en los ejemplos, las diferencias entre las tasas de contribución de los diversos sistemas, están dadas no sólo por las tasas de interés técnico computables sino que está afectadas por los diversos valores de los períodos de recuperación.

A los efectos de poder visualizar la magnitud de la incidencia de esos diferentes períodos, analizaremos la composición de las tasas de contribuciones de un sistema de reparto y la de un sistema de capitalización completa.

En tal sentido, podemos plantear en forma genérica los dos tipos de factores que la componen. Apreciamos de acuerdo [2] y [14] la validez de las siguientes expresiones:

$$TCR = K * (1+c)^{-PRR} \quad \text{y} \quad TCC = K * [(1+c)^*(1+i_s)]^{-PRC} \quad [16]$$

Donde:

- K es el factor común de ambas formulaciones

- PRR es el período de recuperación para el sistema de reparto
- PRC es el período de recuperación para el sistema de capitalización completa

Analicemos los casos en los que la tasa de contribución del sistema de Capitalización es menor a la de reparto, es decir cuando  $TCC < TCR$ . Se puede apreciar que esta propiedad se cumpliría siempre que:

$$[(1+c)*(1+i_s)]^{-PRC} < (1+c)^{-PRR}$$

Se destaca que la tasa de contribuciones del sistema de capitalización completa sea menor a la del sistema de reparto, implica que son necesarios menores contribuciones de los afiliados ante similares niveles de prestaciones. En otros términos que ante similares tasas de contribuciones el sistema de capitalización otorgaría mayores prestaciones.

Volviendo a la inequación anterior, despejando  $i_s$ , podemos plantear que se cumpliría siempre que:

$$i_s > (1+c)^{(PPR/PRC - 1)} - 1 \quad [17]$$

Entonces, cuando  $PRC = PPR$ , basta que  $i_s$  sea positivo para que se cumpla que  $TCC > TCR$ .

Cuando  $PRC = PPR$  basta que ambas tasas  $i_s$  y  $c$  sean no negativas para que se verifique.

En los restantes casos, la tasa  $i_s$  debería ser superior a un número no negativo, cuya magnitud no debería ser significativa, a consecuencia de que el cociente entre el PRR y el PRC es bajo.

Consideremos los ejemplos anteriores en relación al sistema de reparto y al de capitalización. Para que  $TCC$  sea menor que  $TCR$ ,  $i_s$  debería cumplir que:

$$i_s > 1.05^{(3.696/3.83 - 1)} - 1 = 1.05^{-0.035} - 1 = 0.998 - 1 = -0.002$$

Por lo tanto bastaría que  $i_s$  fuese no negativo para que se cumpliera la relación prevista entre  $TCC$  y  $TCR$ . Como en el ejemplo considerado,  $i_s = 0.20$ , se explica la importante diferencia existente en el ejemplo entre las tasas de equilibrio de ambos sistemas.

Se puede apreciar que el resultado más significativo es que, por el bajo nivel del exponente de  $(1+c)$ , el término de la derecha de la inequación es prácticamente nulo. Ello es consecuencia de la poca variación que se verifica en los períodos de recuperación entre los dos sistemas de financiación.

Ampliando lo expuesto, si seguimos con el ejemplo podemos apreciar que la edad de inicio de la actividad es a los 20 años y la final es a los 100 años. O sea que el horizonte de análisis es de 80 años, mientras que el período de recuperación es para el sistema de reparto de menos de 37 años, levemente inferior a la mitad de

ese período. Por lo tanto, es impensable que pueda existir una diferencia muy sustantiva cuando se cambia de sistema, especialmente cuando consideramos movilidades salariales verticales incambiadas y tasas de expansión también constantes.

A vía de ejemplo consideremos el caso de una diferencia pudiese del 10%, entre ambos períodos de recuperación. En tal caso el segundo término de la inecuación tendría valores comprendidos entre 0.005 y  $-0.004$  según PRR sea mayor o menor que PRC respectivamente. Al estar considerando tasas de interés cuya unidad de tiempo es una década, evidentemente tales valores son inateriales por lo que se pueden, desde el punto de vista práctico, descartar.

Esta simplificación permite considerar exclusivamente a la tasa de interés real sobre salarios. En tal sentido, podemos inferir que mientras la tasa de interés real sea no negativa, la tasa de contribución del sistema de capitalización completa será menor que la correspondiente al sistema de reparto. Siempre que consideremos sistemas de financiación colectiva con movilidades salariales y tasa de expansión similares.

## CONCLUSIONES

Del análisis realizado precedentemente se ha podido inferir que la tasa de interés actuarial de un sistema de capitalización completa, depende de la tasa de expansión del sistema de financiación colectiva y de la tasa de interés asociada a los rendimientos de las colocaciones del capital. Más específicamente, podemos establecer que la tasa de interés técnico del sistema de capitalización total de un régimen de financiación colectiva se puede determinar a partir de la composición de dos tipos de tasas, una asociada ("c") a los aspectos demográficos que afectan al sistema, en particular al crecimiento de los cotizantes medido a través del aumento promedio de las altas de cotizantes y por otro, (" $i_s$ ") asociada a los aspectos financieros, en particular a la rentabilidad de los fondos acumulados.

Esta propiedad permite diferenciar el nivel de las tasas de un sistema de capitalización completa al de las asociadas al régimen de reparto y también a las de un sistema de financiación individual. Además, inciden levemente las variaciones de los Períodos de Recuperación que se verifican entre los diversos sistemas.

Si descartamos estos pequeños efectos, podemos establecer que:

- si comparamos la tasa asociada al sistema de capitalización completa con la del sistema de reparto ("c"), siempre será mayor mientras que la tasa de interés real sobre salarios promedio del período de análisis sea positiva. Esta hace inaplicable la paradoja del sistema de reparto<sup>4</sup> para este caso.
- si comparamos esa tasa con la del sistema de financiación individual (" $i_s$ "), podemos apreciar que siempre será mayor mientras la tasa de expansión del sistema de financiación colectiva sea positiva. Por ende, en tales casos

---

<sup>4</sup> Luis Camacho . "La paradoja del sistema de reparto". Banco de Previsión Social. Indicadores de la Seguridad Social No, 107.

bajo similares condiciones en cuanto a niveles de reservas y posibilidades de colocación de fondos, un sistema de financiación colectiva de capitalización completa permitirá otorgar mejores prestaciones que uno de financiación individual.

- si comparamos las tasas asociadas a un sistema de reparto, con la de uno de financiación individual, aquel podrá otorgar, ante iguales niveles de contribuciones, mayores prestaciones siempre que la tasa de expansión del sistema de reparto supere a la tasa de interés real sobre salarios. Por lo tanto, en este caso se cumpliría cabalmente la referida paradoja.

Como síntesis podemos decir que la tasa de interés actuarial esta influida tanto por la expansión del sistema como por la rentabilidad de las colocaciones de fondos, lo que por lo general ante tasas de contribuciones similares, permite otorgar mejores prestaciones que el sistema de reparto e inclusive que las de los sistema de financiación individual. Las excepciones a esta regla se pueden presentar exclusivamente cuando sean negativas las tasas de expansión del sistema y/o las rentabilidades de las inversiones futuras.

## ANEXO I

### VARIABLES QUE INCIDEN EN EL EQUILIBRIO FINANCIERO INDIVIDUAL

#### 1) Edad Central de Cotización (ECC)

Podemos considerar el caso hipotético de que todas esas Contribuciones Esperadas por edad se puedan pagar conjuntamente a una edad intermedia entre “ $e_r$ ” y “ $e_{r-1}$ ” que denominamos Edad Central de Cotización (ECC), de tal forma que desde el punto de vista financiero fuese equivalente a la operación real de pagos periódicos y sucesivos hasta la edad de retiro.

En esta situación, el valor de las contribuciones totales a obtener es el siguiente:

$$VAC = \left[ \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} CE_j \right] * (1+i_s)^{(e_i-ECC)}$$

Donde:

- $CE_j$  = Cotización Esperada a la edad  $j = S_j * TCI * I_j / I_{ei}$
- $S_j$  = Sueldo de Cotización a la edad  $j$
- $I_j / I_{ei}$  = Probabilidad de Supervivencia a la edad  $j$ , partiendo de la edad de inicio  $e_i$
- $i_s$  = Tasa de interés real sobre salarios
- $e_r$  = Edad de retiro

#### 2) Tiempo Medio de Cotización (TMC)

Definimos al Tiempo Medio de Cotización, como la suma de las probabilidades de supervivencia durante el período de actividad de tal forma que:

$$TMC = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} I_j / I_{ei}$$

#### 3) Sueldo Medio de Cotización (SMC)

En lugar de trabajar con sueldos anuales diferentes para cada edad, es posible considerar en el análisis un sueldo promedio por unidad de tiempo, constante para todos los períodos de cotización esperados. Ello es posible si definimos el Sueldo Medio de Cotización como sigue:

$$SMC = \frac{\sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} CE_j}{TMC}$$

Es de destacar que la suma de cotizaciones esperadas de todo el período se divide entre el Tiempo Medio de Cotización por lo que el sueldo medio resultante está referido a cada una de las unidades de tiempo que integran dicho tiempo medio.

#### 4) Valor Actual de las Cotizaciones

Se ha demostrado que el valor actualizado de las cotizaciones totales a la edad de inicio de la actividad, como:

$$VAC = TMC * SMC * TCI * (1+i_s)^{(ei-ECC)}$$

Como síntesis podemos establecer que los aportes totales pueden ser calculados aplicando la tasa de contribuciones (**TCI**), a la masa salarial total de cotizantes, que a su vez puede ser estimada multiplicando el sueldo promedio de cotización (**SMC**) por la cantidad de unidades de tiempo de cotización esperada (**TMC**). Su valoración a la edad de inicio de la cotización se realiza aplicando la edad central de cotización (**ECC**).

#### 5) Edad Central de Jubilación (ECJ)

Al igual que para las contribuciones, podemos plantearnos una situación hipotética en que la totalidad de las jubilaciones se paguen en un instante en la vida de la persona, que denominamos Edad Central de Jubilación que tenga idéntico efecto financiero que el cobro periódico de las mismas tal cual es el régimen real. En ese caso, el valor actualizado de las jubilaciones tendría la siguiente expresión:

$$VAJ = \left[ \sum_{j=e_r}^{j=e_f} JR_j * I_j / I_{ei} \right] * (1+i_s)^{(ei-ECJ)}$$

donde  $JR_j$  es el nivel de la jubilación al año  $j$

#### 6) Tiempo Medio de Jubilación (TMJ)

De acuerdo al análisis efectuado respecto al Tiempo Medio de Cotización, podemos plantear al Tiempo Medio de Jubilación como:

$$TMJ = \frac{\sum_{j=e_r}^{j=e_f} (I_j / I_{ei})}{j=e_r}$$

Resulta de suma importancia tener presente que el Tiempo Medio de Jubilación (TMJ) no representa la esperanza de vida a la edad de retiro donde se visualizan los años restantes esperados a partir de haber obtenido una jubilación, o lo que en este caso es lo mismo que haber llegado con vida a la edad “ $e_r$ ”.

### 7) Sueldo Medio Básico Jubilatorio (SMBJ)

En lugar de considerar sueldos básicos jubilatorios cambiantes por edad, por efecto de las revalorizaciones periódicas que producen, podemos considerar un sueldo básico jubilatorio de nivel promedio por unidad de tiempo.

$$\text{SMBJ} = \frac{\sum_{j=e_r}^{j=e_f} \text{JRj} * I/I_{ei}}{\text{TR} * \text{TMJ}}$$

Donde TR es la tasa de reemplazo.

### 8) Valor Actual de las Jubilaciones

En base a las definiciones y análisis precedentes, podemos expresar el valor actualizado de las jubilaciones a la edad cero, como:

$$\text{VAJ} = \text{TMJ} * \text{SMBJ} * \text{TR} * (1+i_s)^{e_i - \text{ECJ}}$$

Por lo tanto el valor actualizado de las prestaciones jubilatorias es igual a la actualización desde la edad central de jubilación del producto del Tiempo Medio de Jubilación (TMJ) por el Sueldo medio básico jubilación (SMBJ) y la tasa de reemplazo (TR).

## ANEXO II

### VARIABLES QUE INCIDEN EN EL EQUILIBRIO FINANCIERO DE UN SISTEMA DE REPARTO

#### 1) Altas de Cotizantes

Consideremos una situación en la que relacionamos al número de altas de cotizantes de un año respecto al año anterior de la siguiente forma:

$$A_{e_k} = A_{e_{k+1}} \cdot (1 + c(e_k, e_{k+1})) \text{ para todo } e_i \leq e_k$$

donde  $A_{e_k}$  y  $A_{e_{k+1}}$  son las altas de cotizantes asociadas a los actuales afiliados de edad  $e_k$  y  $e_{k+1}$  respectivamente y  $c(e_k, e_{k+1})$  es la tasa de crecimiento de las altas entre los años consecutivos asociados a las edades " $e_k$ " y " $e_{k+1}$ ".

#### 2) Evolución del número de cotizantes y jubilados por edad

El número de sobrevivientes por edad en un momento se puede estimar multiplicando la probabilidad de sobrevivencia por el número de altas asociados a las diferentes edades actuales, tal cual se expresa a continuación:

$$\text{Numero de Sobrevivientes de edad } e_k = A_{e_k} \cdot I_{e_k} / I_{e_i} \\ \text{para } e_i \leq e_k \leq e_r$$

Para desagregar la expresión anterior en cotizantes y jubilados basta considerar la edad de retiro ( $e_r$ ), ya que a partir de ella se pueden plantear las siguientes expresiones.

$$\text{Cotizantes} = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} [A_j \cdot I_j / I_{e_i}]$$

$$\text{Jubilados} = \sum_{j=e_r}^{j=e_f} [A_j \cdot I_j / I_{e_i}]$$

#### 3) Edad Central de Cotización (ECC)

Podemos considerar el caso hipotético de que el nivel de las altas anuales es constante e igual a los asociados a una edad intermedia comprendida entre " $e_i$ " y " $e_{r-1}$ " que denominamos Edad Central de Cotización (ECC), de tal forma que se cumpla la siguiente relación.

$$\text{Cotizaciones} = A_{ECC} \cdot \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} [I_j / I_{e_i} \cdot S_j \cdot TC]$$

En otros términos, en consideramos en lugar de las diferentes altas anuales por un número promedio que denotamos por  $A_{ECC}$ , por lo que la evolución del número de cotizantes depende sólo de la tasa de mortalidad.

#### 4) Tiempo Medio de Cotización (TMC)

La suma de las probabilidades de supervivencia para todas las edades de cotización puede dar lugar a la siguiente expresión, que denotamos como el tiempo medio de cotización.

$$TMC = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} (I_j / I_{ei}) \quad [7]$$

Cada cociente de la sumatoria indica la fracción de año que se espera que el cotizante viva, estimada a partir de la edad de inicio de la actividad. Como tales fracciones se acumulan para todo el período de actividad, el resultado final será igual al tiempo esperado de cotización.

#### 5) Sueldo Medio de Cotización (SMC)

En lugar de operar con sueldos anuales diferentes para cada edad, es posible considerar en el análisis un sueldo promedio anual, de la siguiente forma:

$$SMC = \frac{\sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} [S_j * (I_j / I_{ei})]}{TMC}$$

Es un valor que resulta de promediar los sueldos vigentes para las diferentes edades activas, ponderados por la proporción de la fracción de año de vida esperada para cada edad en el tiempo medio de cotización. .

#### 5) Cotizaciones Totales

A partir de las expresiones anteriores podemos plantear la siguiente formulación general para el total de cotizaciones:

$$\text{Cotizaciones} = TMC * SMC * A_{ECC} * TCR$$

Donde TCR es la tasa de contribuciones del sistema de reparto.

Las cotizaciones pueden ser calculadas a partir del producto del tiempo medio de cotización, del número altas asociadas a la edad central de cotización, del sueldo medio de cotización por edad y de la tasa de contribución.

#### 6) Importe de las Jubilaciones por Edad

En el importe de las altas de jubilaciones del año actual se calcula multiplicando el Sueldo Básico Jubilatorio (SBJ) por la tasa de reemplazo (TR) :

$$JUBILACION INICIAL = SBJ * TR$$

Las altas del año anterior, si bien tenían el mismo valor al momento del alta, actualmente fueron reajustadas a una tasa "a" que puede ser por ejemplo la tasa de crecimiento de los salarios o la de los precios. Como consideramos valores constantes en términos de salarios, el valor actual de las altas unitarias del año anterior será igual al valor original multiplicado por el cociente  $(1+a)/(1+s)$ . Por lo tanto, el importe promedio de una jubilación depende de la edad actual, y puede ser expresado como:

$$\text{JUBILACIÓN REAL A EDAD } j = \text{JR}_j = \text{SBJ} * \text{TR} * [(1+a)/(1+s)]^{(j-e_r)}$$

para  $j \geq e_r$

### 7) Edad Central de Jubilación. (ECJ)

En tal caso, la expresión del nivel total de jubilaciones puede ser planteada como sigue:

$$\text{Jubilaciones} = A_{\text{ECJ}} * \sum_{j=e_r}^{j=e_f} (I_j / I_{e_i}) * \text{JR}_j$$

Las altas de cotizantes asociadas a los que actualmente tienen la Edad Central de Jubilaciones, son tales que permiten obtener el importe total por jubilaciones.

### 8) Tiempo Medio de Jubilación (TMJ)

La suma de las probabilidades de supervivencia para todas las edades de jubilación puede dar lugar a la siguiente expresión, que denominamos como el tiempo medio de jubilación.

$$\text{TMJ} = \sum_{j=e_r}^{j=e_f} (I_j / I_{e_i})$$

Representa el número medio de unidades de tiempo que se espera percibir una jubilación, visualizados desde el instante inicial del período de cotización, es decir a la edad  $e_r$ .

### 9) Sueldo Medio Básico Jubilatorio (SMBJ)

En lugar de considerar sueldos básicos jubilatorios cambiantes por edad, por efecto de las revalorizaciones periódicas que se producen, podemos considerar un sueldo básico jubilatorio de nivel promedio por unidad de tiempo. Ese promedio lo referiremos a las unidades de tiempo del Tiempo Medio Jubilación, por lo que la expresión para SMBJ será la siguiente:

$$\text{SMBJ} = \frac{\sum_{j=e_r}^{j=e_f} [\text{JR}_j * (I_j / I_{e_i})]}{\text{TMJ}} * (1/\text{TR})$$

10) Considerando las expresiones anteriores es posible plantear el valor de las jubilaciones del año de la siguiente forma:

$$\text{Jubilaciones} = \text{TMJ} * \text{SMBJ} * \text{TR} * \text{A}_{\text{ECJ}}$$

La formulación de las jubilaciones totales depende del Sueldo Medio Básico Jubilatorio, el número de altas asociados a la edad central de jubilación, la tasa de reemplazo y al tiempo medio de jubilación.