Análisis del Equilibrio Financiero Individual de un Sistema de Prestación Definida computando mejoras futuras en las Tasas de Mortalidad

Cr. Luis Camacho

Análisis del Equilibrio Financiero Individual de un Sistema de Prestación Definida computando mejoras futuras en las Tasas de Mortalidad

Introducción

El objetivo de este análisis es el de resaltar la importancia de incluir, en forma expresa o tácita, en la evaluación del equilibrio financiero individual de un sistema de prestación definida, las probabilidades de sobrevivencia basadas en tablas de mortalidad dinámicas.

Para ello se plantearán dos formas alternativas de expresión de la ecuación de equilibrio financiero. Bajo un primer enfoque incluiremos en el análisis tablas de mortalidad dinámicas, mientras que en el segundo, partiendo de una tabla de mortalidad estática, llegaremos a la fórmula de equilibrio mediante cambios en las tasa de interés técnico a computar en los cálculos.

Los modelos que se analizan representan una simplificación de realidad sujeta a estudio, por lo que resulta imprescindible destacar las hipótesis más significativas bajo las cuales fueron desarrollados.

En ese sentido podemos establecer los siguientes supuestos asumidos:

-Se supone una única edad para el inicio de la actividad "ei" y una edad única de inicio de la jubilación "er".

-Existe una movilidad salarial vertical variable por edad, que no se modifica en el horizonte de análisis.

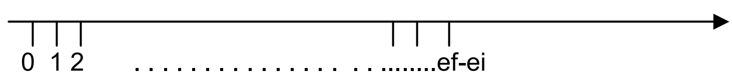
-Se excluyen del análisis las contribuciones y prestaciones asociadas a los riesgos de invalidez y muerte.

Una suposición adicional de importancia es que la jubilación inicial en "er", se reajusta de acuerdo a las tasas de variación de los salarios.

Evolución del número de miembros de una cohorte inicial

Asumiremos que para cada año existen mejoras en la mortalidad que denotamos por " d(h)j " al porcentaje de disminución de la tasas de mortalidad en el año comprendido entre los instantes "h" y "h+1" para la edad "j".

La definición anterior puede ser apreciada más claramente si planteamos el eje de tiempo de la siguiente forma:



donde “0” representa el principio del año origen del análisis y los demás números corresponden al inicio de los años siguientes.

Por lo tanto, si conocemos las tasas de mortalidad “q j “ para todo j comprendido entre ei y ef (edad final de la tabla de mortalidad), podemos definir a las nuevas tasas de mortalidad anuales como:

$$\mathbf{q^{(t)}_j = q_j *(1-d^{(0)}_j)* (1-d^{(1)}_j)* (1-d^{(3)}_j)*... *(1-d^{(t)}_j) = q_j * \prod_{h=0}^{h=t} (1-d^{(h)}_j)} \qquad \mathbf{(1)}$$

donde “q(t)j “ es la tasa de mortalidad para una persona, de la cohorte considerada, con una edad j, en el año emprendido entre los instantes “t y t+1” ,

Resulta obvio, que en caso de que no existan mejoras de mortalidad o sea que todos los “d(h)j ” son nulos, se cumple que q(t)j es igual a q j para todo j.

Denotemos a la sucesión del número de supervivientes de la cohorte inicial, a principios de cada año siguiente como “l(0)j” (j>=ei) , quienes están sujetos a las tasas de mortalidad dinámicas definidas precedentemente. Podemos además expresar la relación entre los sobrevivientes esperados para dos edades sucesivos como:

$$\mathbf{l^{(0)}j+1 = l^{(0)}j * (1- q^{(j-ei)} j)} \qquad \mathbf{(2)}$$

El superíndice “j-ei” indica el tiempo transcurrido entre el año de origen, cuando los miembros de la cohorte tenían la edad ei, y el año en que cumplen “j” años de edad.

La expresión anterior es una relación de recurrencia, por lo cual operando hacia atrás en el tiempo “l(0)j” puede ser calculado a partir de “l(0)ei” de la siguiente forma:

$$l^{(0)}j+1 = l_{ei} * \prod_{h=ei}^{h=j} (1-q^{(h-ei)}_h)) \qquad j >= ei \qquad \mathbf{(3)}$$

Por lo tanto, se puede apreciar que los sobrevivientes de una cohorte que se inicia en t=0, se calcula a partir de los productos de los complementos de las probabilidades de supervivencia que se encuentran en la diagonal de una matriz hipotética donde en las filas figuran las edades y en las columnas el tiempo.

Habiendo planteado la fórmula para la estimación de la evolución de los sobrevivientes de una cohorte sujeta a tasas de mortalidad dinámica, estamos en condiciones de plantear la ecuación de equilibrio financiero individual de un seguro de prestación definida por una jubilación.

Ejemplo:

A efectos de visualizar en forma simple las formulaciones anteriores, planteamos a continuación un ejemplo en el cual consideramos en lugar de años décadas como unidad de tiempo tanto para los tramos de edad como los períodos de tiempo futuros.

En el primer cuadro planteamos a las diversas tasas de mortalidad decenales dinámica que incluyen, como se puede apreciar mejoras en todas las edades y períodos.

CUADRO 1

tasas de mortalidad decenales

	Instante T								
j \ t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
2	0,010	0,009	0,008	0,007	0,006	0,006	0,005	0,005	0,004
3	0,012	0,010	0,009	0,008	0,008	0,007	0,006	0,006	0,005
4	0,018	0,016	0,014	0,013	0,011	0,010	0,009	0,008	0,007
5	0,051	0,047	0,043	0,040	0,037	0,034	0,031	0,029	0,027
6	0,130	0,121	0,111	0,103	0,095	0,088	0,082	0,075	0,070
7	0,289	0,269	0,250	0,232	0,215	0,200	0,186	0,173	0,160
8	0,644	0,636	0,628	0,620	0,612	0,604	0,597	0,589	0,582
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Donde j son las edades en décadas y t los inicios de las diversas décadas futuras.

A partir del cuadro anterior y aplicando las fórmulas planteadas anteriormente podemos construir el siguiente cuadro:

CUADRO 2

probabilidades de sobrevivencia

j \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1,000	1,000							
3	0,990	0,990	0,991						
4	0,978		0,980	0,982					
5	0,961			0,966	0,970				
6	0,912				0,927	0,934			
7	0,793					0,839	0,852		
8	0,564						0,671	0,694	
9	0,201							0,271	0,285

En la primer columna figuran las probabilidades de sobrevivencia de los miembros de una cohorte que inicia su actividad a la edad 2 en el instante 0, sin considerar mejoras en la mortalidad.

En la primera diagonal las probabilidades de sobrevivencia de los miembros de una cohorte que inicia su actividad a la edad 2 en el instante 0, considerando mejoras en la mortalidad. En la segunda diagonal las probabilidades de sobrevivencia asociadas a una segunda cohorte.

Ecuación de equilibrio con Tasas de Mortalidad Dinámicas

El equilibrio financiero individual asociado a un miembro tipo de una generación que inicia su actividad en el año t=0, se logra con la igualdad de los valores actualizados de sus cotizaciones con los de las jubilaciones asociados, se logra según el planteo del ANEXO a través de la siguiente expresión[1]:

$$\mathbf{TMC(0)*SMC*TCI(0)*(1+is)-ECC(0)=TMJ(0)*SMBJ*TR*(1+is)–ECJ(0)} \qquad \mathbf{(4)}$$

El primer miembro de la ecuación indica el valor actualizado de las contribuciones individuales y el segundo el de la prestaciones. La tasa de contribución TCI(0) es la variable que permite obtener el equilibrio financiero, puesto que suponemos un sistema de prestaciones definidas.

En cuanto la notación utilizada podemos establecer que TMC(0) y TMJ(0) representan los tiempos medios de cotizaciones y jubilaciones cuando en el análisis se incluyen la evolución de una cohorte sujeta a tasas de mortalidad dinámicas, SMC y SMBJ los sueldos medios de cotización y básico jubilatorio; TCI y TR las tasas de contribución y de reemplazo; ECC(0) y ECJ(0) las edades centrales de cotización y jubilación respectivamente. A efectos de aclarar estos conceptos, en el ANEXO se realiza un desarrollo de las principales funciones utilizadas.

Al considerar un sistema de prestaciones definidas, la variable de ajuste será la Tasa de Contribución (TCI), por lo que corresponde que la despejemos de la expresión anterior (4), por lo que se cumple:

$$\mathbf{TCI^{(0)} = \frac{SMBJ*TR\ *\ TMJ^{(0)}}{SMC\ *\ TMC^{(0)}}\ *\ (1+i_s)^{(ECC(0)-ECJ(0))}} \qquad \mathbf{(5)}$$

La tasa de cotización de equilibrio depende entonces, de una relación económica entre el nivel de la jubilación promedio y el sueldo medio de actividad, una relación demográfica entre el tiempo medio de jubilación y el de cotización, y un factor financiero en el que inciden tanto la tasa de interés real sobre salarios considerada en el análisis así como la diferencia entre la Edad Central de Jubilación y la de Cotización, que representa el período en el que se recuperarían en promedio los aportes.

Es importante tener presente que “ is “ es la tasa de interés real sobre salarios vigente en todo el horizonte de análisis. Si se supone constante, serán también invariables las siguientes dos tasas que son las que permiten calcular a “is” de la siguiente forma:

$$\mathbf{(1 + i_s) \quad = \quad (1+i) / (1+s)}$$

donde la ”i” es la tasa de interés nominal aplicable a inversiones en pesos corrientes y “s” es la tasa de crecimiento salarial en la unidad de tiempo. Se aplica la tasa “is” para el descuentos de los flujos de fondos porque los miembros de cada sumando se suponen constantes en términos de salarios.

[1] El superíndice (0) indica que en el cálculo se computan tasas de mortalidad dinámicas en las que se consideran las mejoras de mortalidad anual a partir del año base.

Ejemplo:

A efectos de visualizar en forma simple las formulaciones precedentes, planteamos a continuación un ejemplo en el cual consideramos sólo tramos decenales de edad,

Suponemos una edad de inicio de la actividad a los 20 años de edad (j=2) y de retiro 70 años de edad (j=7). El sueldo mensual es de $60.000 que permanece invariable en el tiempo.

La probabilidad de supervivencia, es igual a la que figura en la primer diagonal del cuadro 2.

Además, la tasa de interés real sobre la evolución salarial es del 20% decenal ($\mathbf{i}_s$=0.2).

Con la información anterior podemos estimar el nivel de la masa salarial acumulada para toda la vida activa de un miembro de la cohorte, expresada en valores de la edad de inicio de la actividad.

Cuadro 3 - Computo de los Valores Actuales de la Masa Salarial Total

I	II	III	IV	V	VI
j	**Sueldo**	**$l^{(0)}$ j / lei**	**Producto II*III**	**(1+i(s))-j+ei**	**producto IV*V**
2	60.000	1	60.000	1	60.000
3	60.000	0,990	59.405	0,833	49.504
4	60.000	0,980	58.788	0,694	40.825
5	60.000	0,966	57.955	0,579	33.539
6	60.000	0,927	55.641	0,482	26.833
		4,9	**291.789**		**210.701**

En la segunda columna figuran los sueldos de cada período, en la tercera las probabilidades de sobrevivencia según el cuadro 2; en la quinta los factores de actualización de los flujos de fondos a la edad de inicio de la actividad.

De las últimas filas del cuadro se pueden obtener los valores más importantes de la ecuación de equilibrio planteada anteriormente correspondientes a las edades activas.

Aplicando las fórmulas, se puede demostrar que:

- **TMC** $^{(0)}$= 4.9

- **$1/(1.2)^{ECC-2}$ = 210.701/ 291.789 = 0.72210072** despejando ECC de la expresión anterior, llegamos a que su valor es igual a 3.786, que equivale a 37.86 años.

- El Sueldo de cotización es igual a: SMC = 60.000

Por lo tanto, la masa salarial total acumulada a la edad de inicio de la actividad es igual a:

MASA = 60.000* 4.9 * 0.72210072 = 210.789

Continuamos analizando el ejemplo, con el agregado de que suponemos que el sueldo básico jubilatorio se obtiene promediando los sueldos de toda la vida laboral actualizados por la variación del índice general de salarios. Este índice también sirve para revalorizar las jubilaciones en curso de pago. Además suponemos que la tasa de reemplazo a aplicar sobre el sueldo básico jubilatorio es del 60%.

En el siguiente cuadro tenemos los datos más importantes para el cálculo del costo de la jubilación total actualizada al momento de inicio de la actividad.

Cuadro 4 - Computo de los Valores Actuales de la Jubilación Total

I	II	III	IV	V	VI
j	Jubilación	$l^{(0)}$ j / lei	Producto II*III	(1+i(s))-j+ei	producto IV*V
7	36.000	0,839	30.200	0,402	12.137
8	36.000	0,671	24.160	0,335	8.091
9	36.000	0,271	9.738	0,279	2.718
		1,7805	**64.099**		**22.946**

En la segunda columna figura la jubilación de cada período que se calcula como el resultado del producto del sueldo básico jubilatorio ($60,000) por la tasa de remplazo (0.6); en la tercera las probabilidades de sobrevivencia y en la quintalos factores de actualización de los flujos de fondos a la edad de inicio de la actividad.

En la última fila encontramos la suma de los valores de las columnas III , IV y VI que son la base para el cálculo de las magnitudes de las variables asociadas al costo de las jubilaciones:

Aplicando esos resultados a las fórmulas planteadas anteriormente llegamos a que:

- **$TMJ^{(0)} = 1.7805$**

- **$1/(1.2)^{ECJ-2} = 22.946 / 64.099 = 0.3579753$**

despejando **ECJ** de la expresión anterior, llegamos a que su valor es igual a **7.635,** que equivale a **76.35** años.
Como el sueldo de cotización es constante se verifica que:

- **SBJ *TR = 36.000**

Por lo tanto, el valor esperado total de las jubilaciones a percibir a la edad de inicio de la actividad es igual a:

$$\mathbf{JUBI = 36.000 * 1.7805 * 0.3579753 = 22.945.72}$$

Podemos hallar el nivel de la tasa de contribución de equilibrio como;

$$\mathbf{TCI^{(0)} = JUBI / MASA = 22.945.72 / 210.789 = \underline{0.1089}}$$

Aplicando directamente la fórmula planteada en (5), obtenemos idéntico resultado:

$$\mathbf{TCI^{(0)} = \frac{60.000 * 0.6 * 1.7805 * 1.2^{-3.8487}}{60.000 * 4.9} = 0.1089} \qquad \mathbf{(6)}$$

En este caso se puede apreciar que tiene una importante incidencia el último factor financiero, en el que el exponente figura el inverso del Período de Recuperación (diferencia entre la edad central de jubilación y la de cotización) que es de 38.5 años.

TASA DE APORTE DE EQUILIBRIO A PARTIR DEL COMPUTO DE TASAS DE MORTALIDAD ESTATICAS Y LA TASA DE INTERES REAL SOBRE SALARIOS.

En este caso, aplicaremos la formula de equilibrio financiero planteada en (5) cambiando las probabilidades de sobrevivencia ya que se sustituyen las **"$l^{(0)}j$"** por **"lj"** para todas las edades consideradas. Si los cálculos se realizan con la misma tasa de interés real sobre salarios, el nivel de la tasa de contribuciones que equilibra los valores actualizados de la contribuciones y de las jubilaciones será la siguiente:

$$\mathbf{TCI = \frac{SMBJ * TR * TMJ}{SMC * TMC} * (1+i_s)^{(ECC-ECJ)}} \qquad \mathbf{(7)}$$

Los tiempos medios y edades centrales de cotización y de jubilación difieren de los planteados en (5) a consecuencia del cambio en las probabilidades de sobrevivencia consideradas.

Ejemplo:

Seguimos con el ejemplo considerado anteriormente, pero ahora plantearemos los cuadros de resultados a partir de las probabilidades de supervivencia calculadas a en la primer columna del cuadro 2 en lugar de las consideradas en el caso anterior.

Planteamos entonces los cuadros 5 y 6 donde se computan respectivamente los valores actuales de la masa salarial y del costo total de las jubilaciones.

Cuadro 5 - Computo de los Valores Actuales de la Masa Salarial Total

I	II	III	IV	V	VI
j	Sueldo	$l^{(0)}$ j / lei	Producto II*III	(1+i(s))-j+ei	producto IV*V
2	60.000	1	60.000	1	60.000
3	60.000	0,990	59.405	0,833	49.504
4	60.000	0,978	58.697	0,694	40.762
5	60.000	0,961	57.635	0,579	33.353
6	60.000	0,912	54.697	0,482	26.378

Los principales resultados que se pueden obtener a partir de este cuadro son: **TMC=4.8** y **ECC=3.7786**.

Se puede apreciar que tanto el tiempo medio de cotización como el de jubilación son menores a los calculados para el caso en que se consideraban mejoras en la mortalidad. El primer resultado es evidente a consecuencia de que en este ultimo caso las probabilidades de sobrevivencia son inferiores, mientras que el segundo no lo es tanto, ya que se puede explicar a través de las diferencias en la evolución comparada de las probabilidades de supervivencia por edades.

Cuadro 6 - Computo de los Valores Actuales de la Jubilación Total

I	II	III	IV	V	VI
j	Jubilación	$l^{(0)}$ j / lei	Producto II*III	(1+i(s))-j+ei	producto IV*V
7	36.000	0,793	28.542	0,402	11.470
8	36.000	0,564	20.287	0,335	6.794
9	36.000	0,201	7.225	0,279	2.016
		1,5571	**56.054**		**20.281**

Los resultados asociados a este cuadro son: TMJ=1.5571 y ECJ=7.576.

En este caso también, el tiempo medio y la edad central, es inferior a los valores asociados al caso anterior. No obstante, se puede apreciar que la disminución mayor, en términos relativos se da en el tiempo medio de jubilación, que tendrá especial significación en el cambio de nivel de la tasa de contribución de equilibrio, que se calcula a partir del siguiente cociente;

$$\mathbf{TCI} = \frac{60.000 * 0.6 * 1.5571 * 1.2^{-3.797}}{60.000 * 4.8} = 0.0966 \qquad (8)$$

Se puede apreciar que realizar los cálculos sobre la base de tasas de mortalidad estáticas lleva necesariamente a subvalorar el nivel de la tasa de contribución que corresponde aplicar para la obtención del equilibrio financiero individual. En ese sentido podemos apreciar que para el ejemplo consideramos llegamos a una tasa del 9.66% cuando en realidad la tasa de equilibrio que correspondería aplicar es del

10.89% puesto que en la practica se verificaran mejoras efectivas de la tasas de mortalidad.

Nivel de la Tasa de Interés Técnico a utilizar cuando se computan Tasas de Mortalidad Estáticas

Como se ha podido apreciar en el punto anterior, cuando existen mejoras en las tasas de mortalidad, el calculo de las tasas de contribuciones a partir de la consideración exclusiva de las tasas estáticas lleva a una subvaloración de sus niveles. La importancia de los desvíos será creciente a medida de que se mantengan invariables en el tiempo las tablas de valuación actuarial.

Esta disfuncionalidad puede ser subsanada siempre que se sustituya en la ecuación de equilibrio la tasa de interés real sobre salarios por una tasa de interés técnico de diferente, por lo general de un nivel inferior. A continuación realizaremos un análisis a partir del cual se podrá fijar el nivel de esa tasa de interés técnico.

En ese sentido, plantearemos a continuación un ajuste a la ecuación de equilibrio financiera, basados en la forma en que se formulan en ella, los valores actuales tanto de las cotizaciones (VAC) como de las jubilaciones (VAJ).

En el **ANEXO** se presentan las formulaciones para los valores actuales de los ingresos esperados, por lo que podemos plantear, las siguientes relaciones

$$\mathbf{VAC} = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} \mathbf{CE_j * l_j / l_{ei} * (1+i_s)^{(ei-j)}} \qquad \mathbf{(9)}$$

Cuando se incluyen probabilidades de sobrevivencia calculadas a partir de tasas de mortalidad dinámicas el nivel del valor actual de las cotizaciones puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\mathbf{VAC^{(0)}} = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} \mathbf{CE_j * l^{(0)}{}_j / l_{ei} * (1+i_s)^{(ei-j)}} = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} \mathbf{CE_j * l_j / l_{ei} * (1+i_s)^{(ei-j)} * l^{(0)}{}_j / l_j}$$

Definimos a $\mathbf{j^*}$ de tal forma que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\mathbf{VAC^{(0)} = [\, l^{(0)}{}_{j^*} / l_{j^*} \,] * [\, \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} CE_j * l_j / l_{ei} * (1+i_s)^{(ei-j)} \,]} \qquad \mathbf{(10)}$$

Teniendo en cuenta **(9)** y **(10)**, se puede apreciar que se verifica la siguiente relación entre $\mathbf{VAC^{(0)}}$ y **VAC** :

$$\mathbf{VAC^{(0)} = VAC * l^{(0)}{}_{j^*} / l_{j^*}} \qquad \mathbf{(11)}$$

Pasando a las jubilaciones y definiendo a j** de tal forma que se cumpla la siguiente relación:

$$VAJ^{(0)}= [\, l^{(0)}{}_{j^{**}} / l_{j^{**}} \,] * [\, \sum_{j=e_r}^{j=e_f} JR\, j * l_j / l_{ei} * (1+i_s)^{(ei-ECJ)} \,]$$

Siguiendo un razonamiento similar que para las cotizaciones, se puede demostrar que es valida la siguiente relación entre **VAJ**$^{(0)}$ **y VAJ** :

$$VAJ^{(0)} = VAJ \,{}^{*}\, l^{(0)}{}_{j^{**}} / l_{j^{**}} \qquad (12)$$

Definimos ahora a **p**$^{(0)}$ de tal forma que cumpla con la siguiente igualdad:

$$(1+p^{(0)})^{ECJ-ECC} = \frac{l^{(0)}{}_{j^{**}} / l^{(0)}{}_{j^{*}}}{l_{j^{**}} / l_{j^{*}}} \qquad (13)$$

Entonces, la tasa de contribución de equilibrio puede ser calculada a partir de la siguiente expresión:

$$TCI^{(0)} = \frac{SMBJ * TR * TMJ}{SMC * TMC} * ((1+i^{(0)}{}_{l})^{(ECC-ECJ)} \qquad (14)$$

Con $1+i^{(0)}{}_{l}=(1+is)/(1+p^{(0)})$ **(15)**

Donde “i(0)l“ es la tasa de interés técnico con la que hay que realizar los cálculos para el caso de se consideren en la ecuación de equilibrio solo las tasas de mortalidad sin mejoras.

Ejemplo:

Seguimos con el caso que hemos analizado anteriormente. Calcularemos ahora el valor actual de las cotizaciones y jubilaciones para el caso de aplicar una tasa de contribuciones del 10.965% , una tasa de interés real del 20% y tasas de mortalidad constantes en el tiempo.

En los siguientes cuadros se presentan los cálculos asociados a los valores actuales de las contribuciones y prestaciones

Cuadro 7 - Computo de los Valores Actuales de la Masa Salarial Total

I	II	III	IV	V	VI
j	Sueldo	$l^{(0)}$ j / lei	Producto II*III	(1+i(s))-j+ei	producto IV*V
2	60.000	1	60.000	1	60.000
3	60.000	0,990	59.405	0,833	49.504
4	60.000	0,978	58.697	0,694	40.762
5	60.000	0,961	57.635	0,579	33.353
6	60.000	0,912	54.697	0,482	26.378
		4,8	**290.434**		**209.997**

La suma que figura en la ultima columna, se muestra el valor total actualizado de la masa salarial, por lo que si la multiplicamos por la tasa de contribución, se obtiene el valor actualizado de las contribuciones:

VAC = 209.997 * 0.10965 = 22.868.71

El valor actual de las contribuciones en caso de considerar tasas de mortalidad dinámica se obtiene del primer considerado en los ejemplos: VAC(0) = 22.945.37

Si calculamos el cociente entre los valores asociadas a ambos casos obtenemos los valores asociados al primer cociente característico: l(0)j* / lj* = 1.003352

Para calcular el restante cociente, es preciso calcular el valor actual de las jubilaciones, cuyo nivel , para el caso de invariabilidad de las tasas de mortalidad puede ser obtenido del siguiente cuadro:

Cuadro 8 - Computo de los Valores Actuales de la Jubilación Total

I	II	III	IV	V	VI
j	Jubilación	$l^{(0)}$ j / lei	Producto II*III	(1+i(s))-j+ei	producto IV*V
7	36.000	0,793	28.542	0,402	11.470
8	36.000	0,564	20.287	0,335	6.794
9	36.000	0,201	7.225	0,279	2.016
		1,5571	**56.054**		**20.281**

La suma de la ultima columna nos indica el valor actual del costo: VAJ = 20.281

El valor actual de las jubilaciones cuando las tasas de mortalidad son dinámicas se obtiene del primer caso considerado en los ejemplos: VAJ(0) = 22.945.37

Si calculamos el cociente entre los valores asociadas a ambos casos obtenemos los valores asociados al segundo cociente característico: **l(0)j** / lj** = 1.1314**

Como las edades centrales de cotización y de jubilación para este caso son respectivamente, **3.7786 y 7.576 ,** podemos, aplicando (12), calcular en nivel de p(0);

$(\mathbf{1+ p^{(0)}})^{\mathbf{3.797}}$ = 1.1314 / 1.0003352 =1.127617 por lo que $\underline{p^{(0)} = 0.032129}$

Aplicando la formula de (15) , llegamos a la tasa de interés técnico a aplicar que en este caso seria igual a: **il = 0.16264**

Por lo tanto, si utilizamos esta tasa en la fórmula de la ecuación de equilibrio (9), llegaremos a un nivel de la tasa de contribución de equilibrio igual a 0.1089, idéntica a la del caso en que planteábamos la ecuación de equilibrio con tasas de mortalidad dinámicas.

Una aproximación al Nivel de la Tasa de Interés Técnico

Como se ha podido apreciar, para fijar el nivel exacto de la tasa de interés técnico en caso de que se apliquen tasas de mortalidad estáticas, es preciso calcular previamente los valores actuales que surgen de aplicar tasas de mortalidad dinámicas. Este requisito constituye una limitante muy significativa, puesto que de disponer los valores básicos de la ecuación de equilibrio para tal caso basta con conocer la tasa de interés real sobre salarios para determinar el nivel de la tasa de contribución.

Una forma de evitar la utilización especifica de las tasas dinámicas en la ecuación de equilibrio es través de un procedimiento simple que se basa en la suposición de que se cumplen las siguientes relaciones:

$$j^* = ECC \quad y \quad j^{**} = ECJ$$

Evidentemente, este supuesto nos llevara a la obtención de una solución aproximada. Pero que a través de él, es posible calcular en forma simple una tasa de interés técnico que por lo general no diferirá sustancialmente de la real a consecuencia de la poca variación que se presentan en la práctica en los cocientes $\mathbf{l^{(0)}_{j^{**}} / l^{(0)}_{j^*}}$ **y** $\mathbf{l^{(0)}_{ECJ} / l^{(0)}_{ECC}}$ por un lado y por otro $\mathbf{l_{j^{**}} / l_{j^*}}$ **y** $\mathbf{l_{ECJ} / l_{ECC}}$

Podemos definir ahora a $\mathbf{p^{(0)}}$ como:

$$\mathbf{(1+p^{(0)})^{ECJ-ECC} = \frac{l^{(0)}_{ECJ} / l^{(0)}_{ECC}}{l_{ECJ} / l_{ECC}}} \qquad \mathbf{(16)}$$

Por lo tanto se cumplirán las relaciones **(14)** y **(15)** utilizando la expresión anterior.

Ejemplo:

En el caso sujeto a consideración **ECC=3.7786** y **ECJ=7.576** , por lo que si interpolamos los valores de $\mathbf{l^{(0)}_J}$ **y** $\mathbf{l_j}$ podemos obtener los valores de correspondientes a las edades centrales. El resultado es el siguiente:

$$\mathbf{l^{(0)}_{ECC}} = 0.98208 \qquad y \qquad \mathbf{l^{(0)}_{ECJ} = 0.73769}$$

$$\mathbf{l_{ECC}} = 0.98089 \qquad y \qquad \mathbf{l_{ECJ} = 0.65127}$$

En consecuencia: $\mathbf{(1+p^{(0)})^{3.7975} = 1.1313}$**,** por lo que $\mathbf{p^{(0)} = 0.033}$ e $\mathbf{i^{(0)} = 0{,}1616}$**.** Se puede apreciar la poca significación de la desviación que se da entre en niel de la tasa de interés técnico anterior con el que se deriva de la solución exacta, en especial si se tiene en cuenta que se está operando con tasas decenales de interés.

La tasa de interés técnico planteada anteriormente se debe asociar a la primer generación de activos (que inicia su actividad de en t=0). Para las restantes generaciones se deben calcular las correspondientes tasas $\mathbf{p^{(t)}}$ como paso previo a la fijación del nivel de $\mathbf{i^{(t)}_I}$ y el de la tasa de contribución de equilibrio.

Ejemplo:

Siguiendo con el caso que estamos considerando, calcularemos la tasa de contribución para la segunda generación, que inicia su actividad en t=1. Para esta nueva generación si bien se mantienen las edades centrales de cotización y de jubilación, se deben interpolar los cuatro valores básicos, que en este caso resultan ser iguales a:

$I^{(0)}_{ECC} = 0.9842$ y $\mathbf{I^{(0)}_{ECJ} = 0.75667}$

$I_{ECC} = 0.98089$ y $\mathbf{I_{ECJ} = 0.65127}$

En consecuencia: $\mathbf{(1+p^{(1)})^{3.7975} = 1.1579}$, por lo que $\mathbf{p^{(1)} = 0.0394}$ **y** $\mathbf{i^{(0)} = 0{,}1546}$.
Se puede apreciar la importante disminución que se verifica al considerar una generación posterior.

En términos generales podemos afirmar entonces, que las tasas de interés técnico a aplicar en caso de operar con tablas de mortalidad constantes, deben ser decrecientes con el transcurso del tiempo por lo cual se cumple que: $\mathbf{i^{(t)} >= i^{(t+1)}}$ para todo j >=0. Esta propiedad implica a su vez que las tasas de contribuciones bajo tal supuesto deberían ser crecientes.

Conclusiones

El equilibrio financiero individual asociado a un miembro tipo de una generación específica, se logra con la igualdad de los valores actualizados de sus cotizaciones con los de las jubilaciones asociados. Al considerar un sistema de prestaciones definidas, la variable de ajuste será la tasa de contribución, que depende de una relación económica entre el nivel de la jubilación promedio y el sueldo medio de actividad, una relación demográfica entre el tiempo medio de jubilación y el de cotización, y un factor financiero en el que inciden tanto la tasa de interés real sobre salarios considerada en el análisis así como la diferencia entre la Edad Central de Jubilación y la de Cotización, que representa el período en el que se recuperarían en promedio los aportes.

Es importante tener presente que cuando en el análisis se consideran tasas de mortalidad dinámicas, es válido utilizar factores de descuentos a partir de la tasa de interés real sobre salarios vigente en todo el horizonte de análisis. La aplicación de esta tasa se debe además a que los valores económicos de cada sumando se suponen constantes en términos de salarios. Esta forma de operar sobre las variables monetarias es posible porque se asume que las jubilaciones se reajustan de acuerdo a las variaciones de los salarios.

En la práctica, en muchos casos los cálculos no se realizan a partir de la consideración de tasas de mortalidad dinámicas, por lo que los resultados que se obtienen de aplicar las mismas fórmulas de equilibrio individual, subvaloran los niveles de tasas de contribución que permiten obtener un nivel de prestación dada.

La importancia de los desvíos será creciente a medida de que se postergue en el tiempo la utilización de tablas de valuación actuarial estáticas.

Un ejemplo de importancia de omisión de uso de tablas de mortalidad dinámicas, se presenta en el sistema de ahorro individual uruguayo. En particular porque en el cálculo de las rentas vitalicias del sistema se han mantenido invariables las tasas de mortalidad periodo muy amplio.

Este tipo de desvíos respecto a los valores correctos pueden ser subsanado mediante la sustitución, en la ecuación de equilibrio, de la tasa de interés real sobre salarios por una tasa de interés técnico de diferente, por lo general de un nivel inferior.

Esta nueva tasa resultará de deducir de la tasa de interés real sobre salarios, el crecimiento relativo de las probabilidades de sobrevivencia generado por el dinamismo en las tasas de mortalidad. Para este crecimiento se plantea en el análisis precedente una forma simple de cálculo basada en la evaluación de los cambios que se operan entre las edades centrales de cotización y de jubilación.

En última instancia podemos afirmar que las tasas de interés técnico, en caso de operar con tablas de mortalidad estáticas, deberían disminuir con el transcurso del tiempo. Esta propiedad implica a su vez que las tasas de contribuciones bajo tal supuesto deberían ser crecer por efecto de las mejoras esperadas de tal variable biométrica.

ANEXO

VARIABLES QUE INCIDEN EN EL EQUILIBRIO FINANCIERO INDIVIDUAL

En un analisis[2] sobre el equilibrio financiero, se plantea un tipo de formulación particular de la ecuación de equilibrio individual para un régimen de prestación jubilatoria definida. Comienza analizando los valores actualizados de las contribuciones y prestaciones bajo las siguientes expresiones:

-Valor Actual de las cotizaciones = VAC = $$\left[\sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} CE_j * l_j / l_{ei} * (1+i_s)^{(ei-j)} \right]$$

Donde:

- CE_j =Cotización Esperada a la edad $_j = S_j * TCI * l^{(D)}_j \ / \ l^{(D)}_{ei}$
- S_j = Sueldo de Cotización a la edad j
- $l_j \ / \ l_{ei}$ = Probabilidad de Sobrevivencia a la edad j, partiendo de la edad de inicio ei
- i_s = Tasa de interés real sobre salarios
- e_r= Edad de retiro

-Valor Actual de las jubilaciones = VAJ= $$\left[\sum_{j=e_r}^{j=e_f} JR\,j * l_j \ / \ l_{ei} \right] * (1+i_s)^{(ei-ECJ)}$$

Donde:

- JRj =Nivel de la jubilación al año j = SBJ * TR
- SBJ =Sueldo basico jubilatorio
- TR= Tasa de remplazo
- $l_j \ / \ l_{ei}$ = Probabilidad de Sobrevivencia a la edad j, partiendo de la edad de inicio ei
- i_s = Tasa de interés real sobre salarios
- ef = Edad previa a la final de la tabla de mortalidad.

A partir de la formulaciones anteriores, se realizan los siguientes definiciones adicionales:

---

[2] Luis Camacho. “Explicitación de las variables que intervienen en el equilibrio financiero individual de un sistema jubilatorio con prestación definida” Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No. 7 (abril-junio 2005)

1) **Edad Central de Cotización** (**ECC**)

Podemos considerar el caso hipotético de que todas esas Contribuciones Esperadas por edad se puedan pagar conjuntamente a una edad intermedia entre "e_i" y "e_{r-1}" que denominamos Edad Central de Cotización (ECC), de tal forma que desde el punto de vista financiero fuese equivalente a la operación real de pagos periódicos y sucesivos hasta la edad de retiro.

En esta situación, el valor de las contribuciones totales a obtener es el siguiente:

$$\mathbf{VAC} = \left[\sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} CE_j * l_j / l_{ei} \right] * (1+i_s)^{(ei-ECC)}$$

2) **Tiempo Medio de Cotización (TMC)**

Definimos al Tiempo Medio de Cotización, como la suma de las probabilidades de supervivencia durante el período de actividad de tal forma que:

$$\mathbf{TMC} = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} l_j / l_{ei}$$

3) **Sueldo Medio de Cotización (SMC)**

En lugar de trabajar con sueldos anuales diferentes para cada edad , es posible considerar en el análisis un sueldo promedio por unidad de tiempo, constante para todos los períodos de cotización esperados. Ello es posible si definimos el Sueldo Medio de Cotización como sigue:

$$\mathbf{SMC} = \frac{\sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} CE_j}{TMC}$$

Es de destacar que la suma de cotizaciones esperadas de todo el período se divide entre el Tiempo Medio de Cotización por lo que el sueldo medio resultante está referido a cada una de las unidades de tiempo que integran dicho tiempo medio.

4) **Valor Actual de las Cotizaciones**

Se ha demostrado que el valor actualizado de las cotizaciones totales a la edad de inicio de la actividad, como:

$$\mathbf{VAC = TMC * SMC * TCI * (1+i_s)^{(ei-ECC)}}$$

Como síntesis podemos establecer que los aportes totales pueden ser calculados aplicando la tasa de contribuciones (**TCI)**, a la masa salarial total de cotizantes, que a su vez puede ser estimada multiplicando el sueldo promedio de cotización **(SMC)** por la cantidad de unidades de tiempo de cotización esperada **(TMC).** Su valoración a la edad de inicio de la cotización se realiza aplicando la edad central de cotización **(ECC)**.

5) **Edad Central de Jubilación** (**ECJ**)

Al igual que para las contribuciones, podemos plantearnos una situación hipotética en que la totalidad de las jubilaciones se paguen en un instante en la vida de la persona, que denominamos Edad Central de Jubilación que tenga idéntico efecto financiero que el cobro periódico de las mismas tal cual es el régimen real. En ese caso, el valor actualizado de las jubilaciones tendría la siguiente expresión:

$$\mathbf{VAJ} = \left[\sum_{j=e_r}^{j=e_f} JR\,j \; * \; l_j \;/\; l_{ei} \right] * (1+i_s)^{(ei-ECJ)}$$

donde JRj es el nivel de la jubilación al año j

6) **Tiempo Medio de Jubilación ($TMJ^{(D)}$)**

De acuerdo al análisis efectuado respecto al Tiempo Medio de Cotización, podemos plantear al Tiempo Medio de Jubilación como :

$$TMJ^{(D)} = \sum_{j=e_r}^{j=e_f} (l_j \;/\; l_{ei})$$

Resulta de suma importancia tener presente que el Tiempo Medio de Jubilación (TMJ) no representa la esperanza de vida a la edad de retiro donde se visualizan los años restantes esperados a partir de haber obtenido una jubilación, o lo que en este caso es lo mismo que haber llegado con vida a la edad "er".

7) **Sueldo Medio Básico Jubilatorio (SMBJ)**

En lugar de considerar sueldos básicos jubilatorios cambiantes por edad, por efecto de las revalorizaciones periódicas que producen, podemos considerar un sueldo básico jubilatorio de nivel promedio por unidad de tiempo.

$$SMBJ = \frac{\sum_{j=e_r}^{j=e_f} JRj \; * \; l_j \;/\; l_{ei}}{TR * TMJ^{(D)}}$$

Donde TR es la tasa de remplazo.

8) **Valor Actual de las Jubilaciones**

En base a las definiciones y análisis precedentes, podemos expresar el valor actualizado de las jubilaciones a la edad de inicio de la actividad, como:

$$\mathbf{VAJ = TMJ * SMBJ * TR * (1+i_s)^{ei - ECJ}}$$

Por lo tanto el valor actualizado de las prestaciones jubilatorias es igual a la actualización desde la edad central de jubilación del producto del Tiempo Medio de Jubilación (TMJ) por el Sueldo medio básico jubilación (SMBJ) y la tasa de remplazo(TR).