ANALISIS DE LAS FUNCIONES ACTUARIALES APLICABLES PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE RENTAS DEL SISTEMA DE AHORRO INDIVIDUAL

Cr. Luis Camacho

ANALISIS DE LAS FUNCIONES ACTUARIALES APLICABLES PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE RENTAS DEL SISTEMA DE AHORRO INDIVIDUAL

Cr. Luis Camacho
Asesoría General en Seguridad Social
Junio 2016

Introducción

En este análisis nos ocuparemos de los elementos más importantes y típicos de los modelos que permiten calcular los coeficientes de rentas del sistema de ahorro individual. A los efectos de exponer algunos aspectos generales sobre la ecuación de equilibrio financiero individual asociada a un afiliado promedio, supondremos para simplificar el análisis, que se realiza para una edad de retiro "er".

Bajo este marco, el procedimiento a seguir para el cálculo del nivel de la jubilación mensual (renta vitalicia) es el siguiente:

-Suponemos un nivel de capital acumulado a la edad de retiro ("$\mathbf{K_{er}}$"),

-En primer término debemos calcular el costo de una renta vitalicia unitaria mensual (jubilación) cuyo pago se inicia al mes exacto de cumplir la edad "er" (**"C^{J}_{er}"**).

-En segundo lugar. estimar el costo de una pensión en caso de fallecimiento del jubilado que percibe una jubilación de un peso mensual. La percepción de esta pensión se inicia al mes de fallecimiento del jubilado (“$\mathbf{C^{V}_{er}}$”)

Por lo tanto, el nivel de la jubilación efectiva mensual surgirá de la siguiente expresión:

$$\textbf{Jubilación Mensual} = K_{er} / (C^{J}_{er} + C^{V}_{er})$$

A continuación analizaremos las expresiones matemáticas para cada uno de los costos planteados anteriormente.

Adicionalmente, en el Anexo 2 realizamos un análisis crítico de la fórmula utilizada para la determinación de los actuales coeficientes de rentas de los seguros previsionales.

Previamente plantearemos algunas funciones intermedias utilizadas y la definición ciertos valores de conmutación.

Funciones intermedias

Funciones de Supervivencia Dinámicas

Supongamos que se analiza el caso de un jubilado hombre que accede a la jubilación cuando cumple “er” años de edad en el año “0” .En caso de fallecer la mujer supérstite tiene tres años menos.

Definimos a continuación las expresiones para las tasas de mortalidad para el jubilado y la posible viuda supérstite a las diferentes edades y años calendario:

$q^{J}_{x,a}$ y $q^{V}_{y,a}$ para hombres jubilados y mujeres viudas respectivamente,

con x >=er ; y>= er-3 , x>=0 y y= x - 3

$q^{V}_{x,a}$ representan las probabilidades de fallecimiento de un hombre de” x” años de edad entre los años a y a+1, mientras que $q^{V}_{y,a}$ representan las probabilidades de fallecimiento de una mujer de “y” años de edad entre los años a y a+1.

Es importante tener en cuenta que las tasas de mortalidad están asociadas no sólo a una edad específica sino que también son aplicables a un año calendario concreto.

Estimemos el número esperado de sobrevivientes a partir un número inicial de miembros de ambas cohortes igual a 100.000.

Definamos al número de miembros de las cohortes de la siguiente forma:

$$l^{J}_{er,0} = 100.000 \quad \text{y} \quad l^{V}_{er-3,0} = 100.000$$

Los sobrevivientes al final del primer año serían quienes no se mueren, por lo tanto la expresión sería igual a:

$$l^{J}_{er+1,1} = l^{J}_{er,0} \ {*}(1- q^{J}_{er,0}) \quad \text{y} \quad l^{V}_{er+1-3,1} = l^{V}_{er-3,0} – (1-q^{V}_{er-3,0})$$

En términos generales podemos plantear que el número sobreviviente se puede estimar como:

$$l^{J}_{x,a} = l^{J}_{x-1,a-1} * (1- q^{J}_{x-1,a-1}) \quad \text{y} \quad l^{V}_{y,a} = l^{V}_{y-1,a-1} * (1 - q^{V}_{y-1,a-1})$$

$$\text{con} \quad y= x-3$$

Por la definición de las tasas de mortalidad, los sobrevivientes de una cohorte inicial a la edad de retiro, deben ser estimados a partir de un año "a" específico del calendario.

Si interesase calcular la función de sobrevivientes a partir de otra edad u otro año se deberían aplicar las relaciones anteriores a las nuevas tasas de mortalidad, porque éstas son variables no sólo por edad sino en el tiempo.

Probabilidades de Sobrevivencia

Las expresiones para calcular la probabilidad "P" de que una persona viva a la edad "er" en el año "a", y dentro de "t" años llegue con vida, tendría la siguiente expresión:

$${}_{t}P^{J}_{er} = l^{J}_{er+t} \;/\; l^{J}_{er}$$

A los efectos de simplificar las expresiones de los subíndices retiramos el año de retiro "a",

Resulta evidente que cuando t=0 la expresión es 1, ya que partimos de la condición de que en el año a, la persona estaba con vida.

Funciones asociadas al costo de una jubilación

Costo de una renta vitalicia Anual

Supongamos que la renta vitalicia anual se comienza a pagar al final del año en el que la persona jubiló, que denotamos por "er".

Previamente analicemos el valor esperado a la edad de retiro del costo del pago de jubilación unitaria realizada a la edad "er+t". La expresión siguiente muestra el producto entre la probabilidad de que la persona llegue con vida a la edad "er+T" y el factor del actualización de la unidad monetaria pagada en ese momento. La actualización financiera se realiza a la edad de retiro.

$${}_{t}P^{J}_{er} * v^{t}$$

La expresión **"v^t"** representa el valor actualizado de un peso que se paga dentro de t años a partir de la edad de retiro.[1]

Cuando acumulamos los pagos anuales esperados desde la fecha de inicio de la jubilación hasta su fallecimiento, debemos sumar la expresión anterior para los diferentes valores posibles de "t".

[1] El valor de actualización "v^t" se calcula como $(1+ i)^{-t}$ siendo "i" la tasa de interés utilizada y "t" el periodo de tiempo a actualizar

$$a^{J}_{er} = \sum_{t=1}^{t=fin-er} {}_{t}\mathbf{P}^{J}_{er} * \mathbf{v}^{t}$$

Se suponen pagos a final de cada año, por ello la sumatoria se inicia en t=1 y el último sumando va hasta la edad final de la tabla menos la edad de retiro.

Costo de una jubilación unitaria mensual

Las rentas vitalicias se pagan mensualmente a partir del mes siguiente del retiro y hasta el fallecimiento. Por lo tanto se debe ajustar la fórmula anterior de pagos anuales.

De acuerdo a la demostración que se realiza en el anexo 1, la fórmula aplicable sería la siguiente:

$$\mathbf{C}^{J}_{er} = a^{J(12)}_{er} = (a^{J}_{er} + 11/24) * 12$$

Por lo tanto el costo de una renta de pagos mensuales tiene una fórmula similar, excepto que se debe agregar el sumando 11/24, antes de aplicar el factor 12 de anualización.

Funciones asociadas al costo de una pensión

Funciones basada en el fallecimiento de jubilado

-W_x

Es la probabilidad de generar pensión de un jubilado de edad “x”. Esa probabilidad es válida para fallecimientos a las edades entre x y x+1

-$(l_x - l_{x+1}) / l_{er}$

Es la probabilidad de que los jubilados iniciales mueran entre la edad “x” y “x+1”. Se supone que quienes mueren entre ambas edades lo hacen a la mitad del intervalo es decir a la edad “x+1/2”.

-0.66

Es el porcentaje que representa la asignación de pensión ya que se supone que la supérstite es sólo la esposa del jubilado

$-\mathbf{a}^{V(12)}_{y+0.5} = ((\mathbf{a}^{V(12)}_{y} + \mathbf{a}^{V(12)}_{y+1}) / 2 + 11/24) * 12$

Es la renta vitalicia de una pensionista por la muerte de un jubilado a la edad x. Tener presente que la diferencia de edades entre el cónyuge y su supérstite es de 3 años. Este valor está calculado a la edad x+0.5 que es cuando se muere.

-$v^{x+0.5-er}$

Es el factor por el que hay que multiplicar la renta para valorarla a la edad de inicio de la jubilación “er”.

Costo de una pensión de jubilado fallecido a la edad x

Si el jubilado fallece a la edad x, para percibir una pensión vitalicia se deben dar las siguientes condiciones: en primer término que exista probabilidad de que haya un beneficiario de pensión "**Wx**" a esa edad y que el jubilado fallezca entre las edades "x" y "x+1", tal probabilidad es igual a "$[(l_x - l_{x+1})/l_{er}$" Cumpliéndose ambas condiciones se generará una renta vitalicia cuyo costo será igual al producto de "$0.66 * a^{V(12)}{}_{y+0.5}$". Además para actualizar ese costo a la edad de retiro hay que integrar a la expresión el factor de actualización "$v^{x+0.5-er}$" porque se supone que el fallecimiento se verifica en la mitad del año.

$$W_x * [(l_x - l_{x+1})/l_{er}] * 0.66 * a^{V(12)}{}_{y+0.5} * v^{x+0.5-er}$$

Con y=x-3 y x >= er

Costo de una pensión de jubilado fallecido a edades superiores a la edad de retiro

Cuando consideramos todas las posibilidades de fallecimiento desde el momento del alta de la jubilación, se deben computar los costos asociados a los fallecimientos en los diferentes años de vigencia de la renta. Por lo tanto, la expresión que comprende a todos los costos posibles de la pensión por sobrevivencia sería igual a:

$$C^{V}{}_{er} = \sum_{t=er}^{fin-1} [W_t * [(l_t - l_{t+1})/l_{er}] * 0.66 * a^{V(12)}{}_{t-3+0.5} * v^{t+0.5-er}] =$$

$$= [\sum_{t=er}^{fin-1} [W_t * [(l_t - l_{t+1})] * a^{V(12)}{}_{t-3+0.5} * v^{t+0.5}]*0.66 / (l_{er}*v^{er})$$

Funciones de acumulación de costos

El ahorro acumulado a la edad de retiro de una persona en el sistema de ahorro individual, debe financiar la renta que percibirá directamente el jubilado mientras esté con vida y además la renta que percibirá la esposa en caso de fallecimiento del titular de la renta.

Por lo tanto, es necesario acumular ambos costos que si bien son excluyentes, deben ser financiados por el ahorro total. De acuerdo a los desarrollos matemáticos-actuariales realizados anteriormente, el costo total de ambas prestaciones sería igual a:

Costo Total para una Jubilación de un peso = $C^{J}{}_{er} + C^{V}{}_{er}$

Tener en cuenta que nuestros desarrollos se basaron en rentas jubilatorias unitarias mensuales y pensiones con asignaciones de pensiones calculadas a partir de tal nivel de jubilación.

Por lo tanto, si la persona tiene al cumplir la edad er, un ahorro acumulado de K_{er}, la jubilación mensual que le correspondiente se puede obtener a partir de la aplicación de la siguiente fórmula

Jubilación (Renta) mensual = $K_{er} / (C^{J}{}_{er} + C^{V}{}_{er})$

Si no se dispone de información a priori del nivel de ahorro, se puede plantear un coeficiente que aplicado al capital permita hallar fácilmente la jubilación inicial**.** A los efectos de simplificar, se muestra normalmente el coeficiente de renta por cada 1000 pesos de ahorro.

Para ello basta sustituir en la expresión anterior K_{er} por 1000.

$$\textbf{Coeficiente de Renta} = [1000 / (C^{J}_{er} + C^{V}_{er})]$$

Es evidente que este coeficiente es diferente para cada edad de retiro. Adicionalmente, se debe tener en cuenta que cuando se opera con tasas de mortalidad dinámicas, los coeficientes no sólo varían con la edad de retiro sino que dependen además del año en el que el retiro se efectiviza.

Como último comentario, podemos plantear la duda de la legalidad de la aplicación de tasas de mortalidad dinámicas como las planteadas en las fórmulas que anteceden, ya que el artículo 6 de la ley 16.713 establece que para el cálculo de la jubilación por ahorro individual se deben aplicar “tablas generales de la expectativa de vida al momento de la configuración de la causal, del cese o de la solicitud de la prestación, según cuál fuera posterior”. Las tablas de expectativas se vida se calculan tradicionalmente a partir de tablas de mortalidad reales de momento, las cuales no contemplan mejoras futuras en las tasas de mortalidad.

Anexo 1

DEMOSTRACION DE LA FÓRMULA DE COSTO DE UNA RENTA VITALICIA FRACCIONARIA

A los efectos de simplificar la demostración definíamos los siguientes valores de conmutación:

$$D_x = l_x \quad * \quad v^x$$

que representa el valor actualizado a la fecha de nacimiento de un peso pagado a cada uno de los miembros de la cohorte a la edad x que llegan con vida a esa edad.

RENTAS FRACCIONARIAS VENCIDAS VITALICIAS

Vida entera fraccionaria, 12 pagos en el año de 1/12 de pesos mensuales

PAGOS

```
        1/12     1/12     1/12      1/12                             1/12
¡-------¡-----------¡----------¡----------¡-----------------------------¡-----

x     x+1/12   x+2/12   x+3/12   x+4/12
```

$$1/12 * a^{(12)}_x = (1/12 * D_{x+1/12} + 1/12 * D_{x+2/12} + \ldots .. + \qquad) / D_X \quad =$$

$$= \{ \sum_{t=1}^{t=fin} \sum_{k=1}^{k=12} [D_{x+t+k/12}] \quad \} / (12 * D_X)$$

Hallamos valores aproximados de las funciones de la sumatoria:

$$D_{x+p+k/12} \approx D_{x+p} * ((12-k)/12 \; + \; D_{x+p+1} * (k / 12)$$

Por lo tanto

$$1/12 * a^{(12)}_x = \{ \sum_{k=1}^{k=12} \sum_{t=1}^{t=fin} \{ (D_{x+p} * ((12-k)/12) \; + \; D_{x+p+1} * (k / 12) \} / (12 * D_x) =$$

$$1/12 * a^{(12)}_x = \{ \sum_{k=1}^{k=12} ((1 + a_x) * \quad ((12-k)/12) + a_x * (k/12)) =$$

$$1/12 * a^{(12)}_x = \quad a_x + \sum_{k=1}^{k=12} ((12-k)/12) \quad = a_x + 11/24$$

Porque la sumatoria es igual a la acumulación de los términos de una progresión aritmética.

Si los pagos mensuales son de 1 peso, la fórmula sería igual a:

$$a^{(12)}_x = \quad (\quad a_x + 11/24 \qquad) * 12$$

RENTAS FRACCIONARIAS ADELANTADAS VITALICIAS

Como la renta es vida entera se cumple la siguiente relación entre las rentas vencidas y adelantadas:

$$1/12 * \ddot{a}^{(12)}_x = 1/12 + a^{(12)}_x$$

Recordar que estamos considerandos pagos mensuales de 1/12 pesos mensuales.

Por lo tanto la expresión para la renta fraccionaria anticipada sería igual a:

$$1/12 * \ddot{a}^{(12)}_x = a_x + 13/24$$

Si los pagos mensuales son de 1 peso, la fórmula sería igual a:

$$\ddot{a}^{(12)}_x = (a_x + 13/24) * 12$$

Anexo 2

Análisis crítico de la función utilizada para el cálculo actual de los coeficientes de rentas

La siguiente fórmula ha sido aplicada, hasta el presente, para el cálculo de las rentas vitalicias del régimen de ahorro individual.

$$[\sum_{t=0}^{x=W} {}_tp_x * v^t - 13/24]*12+ [\sum_{t=0}^{w-x} {}_tq_x * {}_tp_{x\,t} * v^t\ ]*12 *0.66*\%\ Benef_x$$

1) El primer sumando expresaría la fórmula de valor actual de una renta fraccionaria adelantada. Presenta un error evidente, a la sumatoria se le resta 13/24 cuando corresponde sumarlo. Adicionalmente incluir esa fracción en la fórmula indicaría que se expresa el valor actual de una renta vitalicia con pagos adelantados. Las rentas de este tipo se pagan a mes vencido por lo que corresponde incluir como sumando la fracción 11/24. Ver los resultados del anexo 1.

2) El segundo sumando muestra la probabilidad de que la persona muera entre t y t+1, suponiendo que la muerte se produce al principio del intervalo y se paga un peso en ese momento, el cual es actualizado a la edad de retiro. Se visualizan tres errores:

   - en primer término, en caso de fallecimiento en un intervalo, en los seguros de muerte de debe suponer el fallecimiento a mitad del intervalo; en este caso en t+0.5.

   - no contempla que a partir de la muerte de la persona genera una renta vitalicia de una persona del sexo opuesto cuya edad difiere en 3 años (en la expresión no figura en la sumatoria ninguna fórmula de renta), lo cual no puede ser solucionado mediante una multiplicación por 12.

   - En tercer lugar, se ubica a la probabilidad de generar pensión fuera de la sumatoria cuanto es variable con la edad de fallecimiento (es probable que sea un error de transcripción).