# UTILISATION DE L'ÉQUATION D'ÉQUILIBRE FINANCIER DANS L'ANALYSE DE CHANGEMENTS PARAMÉTRIQUES D'UN RÉGIME DE RÉPARTITION

**Luis Camacho**
Asesoría General en Seguridad Social
Banco de Previsión Social
Uruguay

## INTRODUCTION

La considération de certains facteurs communs dans les équations d'équilibre financier individuel[1] et collectif dans des systèmes de prestations définies, a permis d'extraire des conclusions sur les différences substantielles entre les régimes par répartition[2], de capitalisation partielle[3] et de capitalisation complète[4]. Plus précisément, en vertu de cette approche, il a été possible de comparer les principaux résultats des divers systèmes financiers à travers l'analyse des taux d'intérêt technique associés[5].

Ces facteurs de base, les temps moyens de cotisations et de retraite, ainsi que les âges centraux de cotisations et de retraite intégrés aux diverses équations d'équilibre financier permettent d'impliquer les similitudes entre leurs formulations de base, seulement distinguables par l'ampleur des taux d'intérêt technique correspondants.

Les hypothèses les plus significatives avec lesquelles ont été développées les modèles utilisés, sont fondées sur une sortie du système causée seulement par le décès et sur des âges uniques pour le début de l'activité et le départ à la retraite.

De même, ces analyses ont été développées en supposant les mêmes taux de mortalité à travers le temps. Bien que cette hypothèse facilite une analyse comparative, elle comporte une faiblesse significative en ce sens qu'elle ignore les améliorations permanentes de la variable tout au long du temps. Dans le développement qui est effectué par la suite, on part d'une méthodologie semblable mais en améliorant l'hypothèse concernant la mortalité future, ce qui permet de produire certaines observations de caractère général sur des possibles réformes paramétriques pour le système de répartition.

Cette méthodologie permettra en plus d'évaluer les taux d'intérêt technique qui peuvent être associés aux diverses générations affectées. Nous visualiserons que dans tous les cas, l'application pure de ces réformes mène inévitablement à des redistributions intergénérationnelles, qui seront d'autant plus élevées que la période des changements proposés est longue.

Les limitations implicites de telles redistributions nous induisent à proposer, d'un point de vue théorique, un nouveau type de réformes, que nous définissons comme des paramètres dynamiques, sous lesquelles, les générations futures auront des taux d'intérêt technique identiques pour établir leur équilibre financier.

---

[1] Luis Camacho. "Explicitación de las variables que intervienen en el equilibrio financiero individual de un sistema jubilatorio con prestación definida" Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No. 7 (abril-junio 2005)

[2] Luis Camacho: "Análisis de la tasa de rentabilidad implícita en el equilibrio financiero de un sistema de reparto". Banco de Previsión Social. Comentarios de la Seguridad Social No 10.

[3] Luis Camacho. "Un modelo heurístico para calcular de la tasa de interés técnico de corte asociada a un sistema de Capitalización Parcial". Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No.23 Abril-Junio 2009

[4] Luis Camacho. "La tasa de interés técnico actuarial asociada a un sistema de capitalización completa con prima única". Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No.14 .Enero-marzo 2007.

[5] Luis Camacho."Clasificación de los Sistemas de Financiación Colectiva según el Grado de Capitalización. Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No. 24. Julio-Setiembre de 2009.

## ANNÉE OÙ L'ÉQUILIBRE FINANCIER DU SYSTÈME EST ÉVALUÉ

Comme il a été établi, il y a un intérêt à obtenir des projections à long terme de l'équation d'équilibre financier du système de répartition. En particulier, nous analyserons les composantes de l'équation pour une année spécifique où tous les participants que ce soit des cotisants ou des retraités soient des membres des générations futures.

Pour une appréciation plus claire de l'équation d'équilibre et l'année où elle sera évaluée, représentons ensuite un schéma dans lequel on montre l'axe du temps, où T=0 est le moment qui représente l'origine de la première année considérée dans l'analyse, qui ne sera généralement pas loin dans l’avenir. Comme mentionné, l'unité de temps considérée dans cette analyse est une année[6], ainsi que dans le graphique où chaque période comprise entre deux intervalles de temps, représente une année particulière.

T= 0 1 $e_r$-$e_i$ $e_f$-$e_i$

|--|--------------|-----------------------------------|-

Si nous définissons “$e_i$“**,** “$e_r$“ **et** “$e_f$“ respectivement comme l’âge du début de l'activité, l’aĝe de la retraite et le dernier âge pour lequel il peut encore exister des affiliés vivants, **T= er-ei** représente le début de l'année où on met à la retraite les membres de la génération qui commence son activité durant l'année **T=0.** Pour cette raison, **T= ef-ei** indique le début de l'année où les membres de cette génération seraient les retraités les plus âgés.

Supposons maintenant qu‘une projection démographique du système est effectuée dans laquelle les mouvements physiques les plus hauts et les plus bas sont estimés, sur la base de tableaux de mortalité dynamiques pendant tout l'horizon de l’analyse. Cette projection permettra de disposer d'informations sur les **entrées annuelles $A^{(T)}$**, que nous supposons être vérifiées chaque année, selon le schéma suivant :

**T= 0 1 $e_{r-ei}$ $e_{f-ei}$**

**|--|--------------|-----------------------------------|--**

**$A^{(0)}$ $A^{(1)}$ $A^{(er-ei)}$ $A^{(ef-ei)}$**

Nous sommes dans des conditions pour indiquer l'année future où nous évaluerons l'équilibre financier du système par répartition. Cette année sera celle qui commence dans le dernier moment qui figure dans l'axe du temps (T=$e_f$-$e_i$) dont la particularité, tel que mentionné auparavant, est que la prochaine génération de cotisants se situe durant l’année la plus vieille.

En d'autres termes, si nous supposons que dans l'année qui commence à T=0 la prochaine génération commence à cotiser, l'équilibre financier réfère à l'année comprise entre les moments “$e_f$-ei“ et “$e_{f+1}$-$e_i$“.

[6] En sens strict, l'unité de temps doit être un mois puisque des cotisations et des prestations sont payées mensuellement. Pour effectuer l'analyse avec ce type d'unité de temps il est nécessaire de disposer des tableaux de mortalité mensuelle. Pour obtenir un tel tableau, on peut consulter “Algoritmo para la apertura mensual de la tabla de Mortalidad – Luis Camacho – Comentarios de Seguridad Social –Mayo de 2005 ”. En effectuant l'analyse la plus simplifiée où les intervalles de temps sont annuels, il est nécessaire d'accumuler les paiements et les encaissements mensuels en principe chaque année.

## ESTIMATION DU NOMBRE DES COTISANTS ET DES RETRAITÉS DANS LA PÉRIODE CONSIDÉRÉE

Dans cette dernière année, il y a des membres de toutes les générations de cotisants et de retraités qui seront associées aux entrées des années comprises entre T=0 et T=ef-ei.

Avant d'estimer le nombre de survivants des entrées de cotisants de toutes les années précédentes, nous associerons l'âge à ce moment-là, à chaque type d'entrée. En ce sens, le schéma suivant nous montre ces âges dans l'indice des entrées par année:

```
T=   0    1           er-ei                        ef-ei
     |-----|--------------|----------------------------------|--
```

$A_{ef}^{(0)}$ $A_{(ef-1)}^{(1)}$ $A_{(ef-er+ei)}^{(er-ei)}$ $A_{ei}^{(ef-ei)}$

$l_{ef}^{(0)}$ $l_{(ef-1)}^{(1)}$ $l_{(ef-er+ei)}^{(er-ei)}$ $l_{ei}^{(ef-ei)}$

Dans la dernière file nous plaçons le nombre attendu de survivants de cohortes associées aux entrées de chaque année, dont le nombre initial est supposé égal au $l_{ei}$ dans tous les cas. Ces estimations peuvent être obtenues à partir des tableaux de mortalité dynamiques.

Par conséquent, $\mathbf{l_j^{(ef-j)}}$ est égal au nombre attendu de survivants à l'âge j de la cohorte qui commence son activité durant l'année **T= ef-j** avec **(ei <=j <=ef)**

Nous sommes maintenant dans des conditions pour formuler l'expression qui permet d'estimer le nombre de survivants pour la dernière année considérée. Pour cela il suffit d'appliquer la règle de trois suivante :

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{l_{ei}}$ | **---** | $\mathbf{l_j^{(ef-j)}}$ |
| $\mathbf{A_j^{(ef-j)}}$ | **---** | **Affiliés Survivants d'âge j** |

Par conséquent, le nombre d'affiliés d'âge "J ", en **ef-ei** est défini par l'expression suivante :

$$\mathbf{ASj = A_j^{(ef-j)} * l_j^{(ef-j)} / l_{ei}} \qquad \textbf{[1]}$$

Rappelons que le quotient $\mathbf{l_j^{(ef-j)}/l_{ei}}$ est égal à la probabilité qu'une personne de la cohorte qui a commencé son activité en T = ef-j, soit vivante à l'âge j en T = ef-ei.

La dénomination générique d'affiliés, permet de considérer en même temps des cotisants et des retraités, qui seront seulement différenciés par leur âge. L'âge (j) sera alors la variable qui nous permet de savoir si un affilié est un cotisant **($j<e_r$**) ou un retraité **($j>=e_r$).**

L'analyse de l'équilibre financier du système par répartition dans un horizon tellement éloigné dans le temps a deux **implications**:

1) L'objectif est d'évaluer l'effet financier associé à des générations futures d'affiliés, en négligeant les particularités actuelles du système. Pour cette raison, ce type d'analyse peut être complémentaire à celle du système des projections financières actuarielles, puisqu'elle visualise seulement le futur éloigné sans tenir compte des problèmes

financiers intermédiaires. Cependant, nous considérons d'intérêt l'utilisation de cette analyse pour l'évaluation des possibles changements paramétriques qui puissent affecter les nouvelles générations d'affiliés.

2) Bien que ce type d'analyse soit complémentaire à celle de projections financières, elle requiert que celle-ci ait un horizon de très long terme car elle est utilisée pour obtenir l'information sur l'évolution des entrées des cotisants futurs. En ce sens-là, il est convenable de souligner que, par exemple, si le début de l'activité est fixé à 20 ans, et si le tableau de mortalité fixe l'âge limite à 100 ans, on devra nécessairement disposer d'informations sur le nombre des entrées prévues pour une période de 80 années.

## L'ÉQUATION GÉNÉRIQUE D'ÉQUILIBRE DE LONG TERME DU SYSTÈME

Par définition, l'équilibre financier du système par répartition se présente annuellement par l'égalité entre les recettes des contributions et les paiements des prestations. Dans cette analyse nous introduisons au début des formulations spécifiques qui permettent d'estimer le nombre de cotisants et de retraités pour l'année considérée. L'inclusion de variables de caractère économique, nous permet de fixer le niveau des cotisations et des retraites de cette année.

### Cotisants et Retraités

Utilisant la relation **[1]** nous pouvons déterminer la quantité des cotisants et des retraités dès que nous connaissons l'âge de début de l'activité **($e_i$)** et de départ à la retraite **($e_r$).** Dans ce sens là, nous devons tenir compte que dans l'année qui commence en "**T=ef-ei**", des cotisants seront ceux qui sont d'âge inférieur à "**$e_r$**" et le reste seront des retraités.

Par conséquent, le nombre total des cotisants et des retraités sera produit par l'accumulation correspondante des affiliés divisés entre les deux catégories selon l'âge:

$$\textbf{Cotisants} = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} [\,ASj\,] \qquad \textbf{[2]}$$

$$\textbf{Retraités} = \sum_{j=e_r}^{j=e_f} [\,ASj\,] \qquad \textbf{[3]}$$

La première somme accumule les cotisants selon l'âge qui est compris entre le début de l'activité "ei" et l'âge précédent la retraite "$e_r$-1". Nous supposons alors que la retraite commence précisément à l'âge "$e_r$".

La deuxième somme exprime le total de retraités de l'année et le dernier terme indique le nombre de retraités les plus âgés possibles, conformément à l'étendue du tableau de mortalité utilisé.

## Cotisations et Retraites

Nous supposons que le salaire d'entrée dans l'activité à l'âge "$e_i$" est accru annuellement sous l'effet d'améliorations dans la carrière de travail, nous permettant de définir des salaires différenciés par âge selon l'expression suivante.

$$\textbf{SALAIRE de l' ÂGE j} = S_j$$
$$\text{avec } j \Rightarrow e_i$$

Il faut souligner que dans cette analyse nous considérons exclusivement les augmentations des salaires sous l'effet de la mobilité salariale verticale. Même s'il existe des accroissements des salaires causés par l'augmentation de la productivité, les valeurs monétaires que nous calculerons dans l'analyse seront dégonflées par l'indice général des salaires donc le résultat sera le même que celui qui serait obtenu en supposant une croissance du salaire globale réelle nulle comme c'est notre cas.

D'autre part, supposons que le montant des nouveaux bénéfices de retraites de l'année présente est calculé en multipliant le Salaire de Base de Retraite **(SBJ)** par le taux de remplacement **(TR)** :

**RETRAITE À L'ÂGE J =JRj = SBJ * TR**
**avec j > = er**

Dans le but de simplifier l'analyse nous considérons le cas où les rentes de retraite sont revalorisées selon l'indice général de salaires[7], De la même façon que pour les salaires, il y a une hypothèse implicite que ces valeurs ont été dégonflées aussi par cet indice.

Par conséquent, les cotisations et les rentes totales de l'année soumise à étude peuvent être calculées à partir des expressions suivantes:

$$\text{Cotisations} = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} [S_j * AS_j] * TCR = SMC^{(D)} * \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} [AS_j] * TCR \qquad [3]$$

Où **SMC** $^{(D)}$ est le salaire moyen de cotisations[8] et **TCR** est le taux de contribution du système, qui est la variable d'ajustement du système quand nous sommes face à un régime de prestation définie.

$$\text{Pensions} = SBJ * TR * \sum_{j=e_r}^{j=e_f} [AS_j] \qquad [4]$$

Nous pouvons maintenant formuler **l'équation d'équilibre** du système par répartition en termes simples:

**Cotisations [3] = Pensions [4]**

---

[7] D'autres situations sont analysées dans: Luis Camacho."La incidencia de la fórmula de cálculo del Sueldo Medio Básico Jubilatorio en el equilibrio financiero individual". Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No. 11 (abril-junio 2006).

[8] $SMC^{(D)} = \Sigma [S_j * AS_j] / \Sigma [AS_j]$ , les sommes sont valides pour les âges actifs "ei" et "er-1".

$$SMC^{(D)} * \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} [ASj] * TCR = SBJ*TR * \sum_{j=e_r}^{j=ef} [ASj]$$

Pour que cette égalité ait du sens, nous devons assumer que le système est exclusivement financé avec des contributions des affiliés, et que les dépenses d'administration sont insignifiantes.

## FORMULATION SPÉCIFIQUE DE L'ÉQUATION D'ÉQUILIBRE FINANCIER

Ensuite nous effectuerons une reformulation de l'équation équilibre, y compris dans l'analyse de nouvelles variables, entre lesquelles nous soulignons les temps moyens de cotisations et de retraite ainsi que les nouvelles entrées associées aux âges centraux de cotisations et de retraite.

### Temps Moyens de Cotisations et de Retraite

Supposons qu'il existe une cohorte hypothétique, dont l'évolution est la suivante.

$$\{ l_{ei}^{(ef-ei)};\ l_{ei+1}^{(ef-ei-1)};\ l_{ei+2}^{(ef-ei-2)};\ldots\ldots\ldots;l_{ei+h}^{(ef-ei-h)};\ldots\ldots\ldots l_{ef}^{(ef-ef)} \}$$

avec $l_{ei}^{(ef-ei)} = l_{ei}$ puisque toutes les cohortes considérées dans cette analyse débutent avec un nombre égal à "$l_{ei}$".

De manière générique, pour un âge "j", le nombre de survivants à cet âge est représenté par l'expression $l_j^{(ef-j)}$. Ces facteurs figurent aussi dans les expressions des cotisations et des pensions.

**Exemple:**

*Dans le tableau suivant, nous montrons un exemple qui permet de visualiser les probabilités de survie des diverses cohortes, en considérant le cas simple où les variables T et J sont exprimées en décennies.*

TABLEAU 1
**PROBABILITÉS DE SURVIE PAR ÂGE**

| | **Moment T** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ÂGE J | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** | 1 |
| 3 | | **0.9910** | 0.9938 | 0.9957 | 0.9970 | 0.9974 | 0.9977 | **0.9981** | 0.9984 |
| 4 | | | **0.9804** | 0.9851 | 0.9886 | 0.9903 | 0.9907 | **0.9910** | 0.9914 |
| 5 | | | | **0.9597** | 0.9678 | 0.9721 | 0.9738 | **0.9741** | 0.9745 |
| 6 | | | | | **0.9177** | 0.9278 | 0.9320 | **0.9336** | 0.9353 |
| 7 | | | | | | **0.8254** | 0.8346 | **0.8383** | 0.8420 |
| 8 | | | | | | | **0.6456** | **0.6528** | 0.6601 |
| 9 | | | | | | | | **0.3210** | 0.3246 |

J ET T EXPRIMÉS DÉCENNIES

*Des probabilités de survie de la première cohorte peuvent être visualisées par l'inférieur diagonal, avec les diagonaux supérieurs associés aux probabilités de survie des cohortes qui commencent l'activité dans des moments ultérieurs.*

*Si nous considérons le cas où T=ef-ei est égal à T=7, l'avant-dernière colonne représente les probabilités de survie pour les membres de la cohorte hypothétique définie précédemment.*

En retournant au cadre générique, nous pouvons définir le temps moyen de cotisations ($TMC^{(D)}$) comme la somme des probabilités de survie de cette cohorte hypothétique pour tous les âges de cotisations. En ce sens nous pouvons formuler l'expression suivante:

$$\mathbf{TMC^{(D)}} = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} (l^{(ef-j)}{}_j / l_{ei}) \qquad [5]$$

Chaque quotient de la somme indique la fraction d'année pendant laquelle il est prévu que le cotisant est vivant, et ceci à partir de l'âge de début de l'activité. Comme de telles fractions s'accumulent pour toute la période d'activité, le résultat final sera égal au temps attendu de cotisations. L'hypothèse de base est que les décès sont vérifiés à la fin de chaque année.

Si pour le cas présenté dans le Tableau 1, nous considérons que l'âge de début de l'activité est j=2 et celle de retraite j=7, pour calculer le temps moyen de cotisations il suffit d'ajouter les cinq premières valeurs de l'avant-dernière colonne. Le résultat est TMC= 4,9, ce que signifie que le temps moyen de cotisations pour ce cas est 49 années.

Dans le même sens, nous pouvons établir que la somme des probabilités de survie pour tous les âges de la retraite peut donner lieu à l'expression suivante, que nous appelons le temps moyen de retraite **(TMJ (D))**.

$$\mathbf{TMC^{(D)}} = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} (l^{(ef-j)}{}_j / l_{ei}) \qquad [6]$$

Pour l'exemple du tableau, nous pouvons calculer ce temps moyen en utilisant les dernières trois valeurs de l'avant-dernière colonne, dont le résultat serait égal à 1,81, ou 18,1 années comme temps moyen de retraite.

Ce dernier résultat doit adéquatement être apprécié, puisqu'il représente le nombre moyen espéré d'unités de temps en réception d'une pension, calculé depuis le moment initial de la période de cotisations et non depuis le moment où la retraite commence.

## Entrées associées aux Âges Centraux de Cotisations et de Retraite

Assumons maintenant qu'il y a un nombre constant d'entrées pour chaque année, , équivalent à l'année intermédiaire "ef-ECC", de telle sorte que le niveau de cotisants totaux prévus pour l'année considérée soit d'un niveau semblable à celui présenté en **[2]**.

Cela est possible si nous définissons ce nombre des entrées constantes $\mathbf{A_{ECC}^{(ef-ECCC)}}$ de telle sorte que, en tenant compte **[1]**, on réalise la relation suivante:

$$\mathbf{Cotisants} = \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} [\, ASj \,] = A_{ECC}^{(ef-ECC)} * \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} l_j^{(ef-j)} / l_{ei}$$

En tenant compte de **[5]**, la nouvelle expression pour le nombre de cotisants peut être la suivante:

$$\mathbf{Cotisants} = A_{ECC}^{(ef-ECC)} * TMC^{(D)} \qquad [7]$$

avec **"ECC"**, nous dénotons l'âge central de cotisations.

Par conséquent, le nombre de cotisants de l'année qui commence avec T=ef-ei, est égal au nombre des entrées de cotisants associé à un âge central de cotisations multiplié par le temps moyen de cotisations.

Il est intéressant de rappeler que ce nombre d'entrées sera d'un niveau intermédiaire en comparaison aux nombres des entrées correspondant aux nombres des actifs actuels, c'est-à-dire :

$$\mathbf{Aei^{(ef\text{-}ei)};\ Aei{+}1^{(ef\text{-}ei\text{-}1)}\ ;........;\ Aer{-}2^{(ef\text{-}er{+}2)};\ Aer{-}1^{(ef\text{-}er{+}1)}}$$

Les indices des expressions des nombres des entrées indiquent l'âge durant la dernière année des cotisants correspondants, allant de $e_i$, à $e_{r-1}$ et comme nous avons dit que le nombre des entrées est constant et intermédiaire, ECC sera aussi comprise entre les âges des limites de cotisations.

De là vient sa dénomination d'âge central de cotisations.

De manière égale nous pouvons proposer l'expression suivante pour calculer le nombre total de retraités:

$$\mathbf{Retraités = A_{ECJ}^{(ef\text{-}ECJ)} * TMJ^{(D)}} \qquad \mathbf{[8]}$$

"ECJ" dénote âge central de retraites.

Nous remplaçons les entrées annuelles correspondant à l'âge de retraite durant l'année de l'analyse, par un niveau des entrées constant qui correspond à celui d'une année intermédiaire "ef-ECJ", de telle sorte que le total de retraités de l'année analysée soit semblable **[3]**.

**Cotisations et Pensions en fonction des entrées aux Âges Centraux**

Nous pouvons reformuler l'équation d'équilibre du système pour l'année considérée en tenant compte des développements précédents. Après simples manipulations algébriques nous obtenons les expressions simples suivantes:

$$\mathbf{Cotisations = A_{ECC}^{(ef\text{-}ECC)} * TMC^{(D)} * SMC^{(D)} * TCR} \qquad \mathbf{[9]}$$

Les deux premiers facteurs indiquent le nombre total de cotisants durant la dernière année; le troisième est le Salaire Moyen de Cotisations et le dernier est le taux de cotisations qui est la variable d'ajustement.

Il faut souligner que les facteurs qui expliquent le niveau de cotisations, ne sont pas indépendants à l'exception du taux de cotisation. Au contraire, le Salaire Moyen de Cotisations dépendra des variables qui affectent l'âge central de cotisations, et le temps moyen de cotisations dépendra des variables qui expliquent le Salaire Moyen de Cotisations. Chaque changement dans certains de ces facteurs pourra produire des modifications dans les autres facteurs. Ainsi par exemple un ajustement dans les probabilités de survie, impliquera des ajustements successifs de ECC, SMC et TMC.

$$\mathbf{Pensions = A_{ECJ}^{(ef\text{-}ECJ)} * SBJ * TR * TMJ^{(D)}} \qquad \mathbf{[10]}$$

La nouvelle formulation des pensions totales dépend du salaire de base de la retraite, du nombre d'entrées associées aux retraités qui avaient l'âge central de retraite pendant le dernière année, du taux de remplacement et du temps moyen à la retraite.

**Équation d'Équilibre en fonction des entrées aux Âges Centraux**

Comme nous avons établi, l'équilibre financier est analysé dans le système par répartition pour l'année qui commence en T= “ef-ei”. Par conséquent, il est important d’établir l'égalité entre des cotisations et des prestations de cette année. Cette dernière sera obtenue par la fixation du taux de contribution du système (TCR).

Par conséquent, l'équilibre entre des cotisations **[9]** et les pensions **[10]** est obtenu, quand le taux TCR satisfait l'égalité suivante :

$$TCR = \frac{[\ SBJ * TR]\ /\ [\ SMC^{(D)}]}{[TMC^{(D)} / TMJ^{(D)}] * [\ A_{ECC}^{(ef\text{-}ECC)}\ /\ A_{ECJ}^{(ef\text{-}ECJ)}\ ]} \quad \textbf{[11]}$$

Dans le numérateur on exprime la relation entre la pension moyenne et le salaire moyen de cotisations. Le dénominateur est le produit de deux quotients qui montre la relation entre le nombre moyen de cotisants et celui de pensionnés. Par conséquent nous avons une façon différente de formuler les relations de base qui influencent le taux d'équilibre :

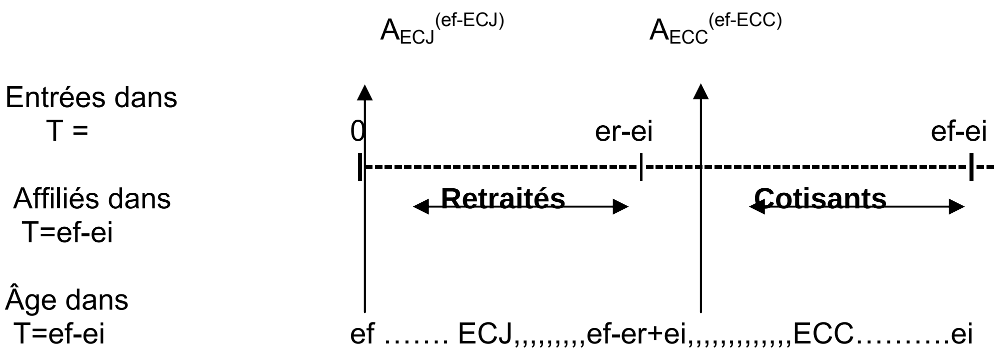
$$\textbf{TCR} = \frac{\textbf{Relation Économique}}{\textbf{Relation Démographique}}$$

Le taux de contribution d'équilibre du système par répartition varie de manière directement proportionnelle à la variation de la relation économique et inversement proportionnelle à la relation démographique.

La relation démographique peut être désagrégée selon diverses composantes. Cette désagrégation nous permet d'estimer le niveau du taux d'intérêt technique associé au régime par répartition en situation d'équilibre.

## LE TAUX DE COTISATIONS D'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME ET LE TAUX D'INTÉRÊT TECHNIQUE ASSOCIÉ AU SYSTÈME PAR RÉPARTITION

Nous plaçons à l'axe du temps les entrées de cotisants associées aux âges centraux de cotisations et de retraite:




Nous pouvons apprécier que les entrées associées à l'âge central de cotisations **($A_{ECC}^{(ef\text{-}ECC)}$)** sont vérifiés après celles associées à l'âge central de retraite **$A_{ECJ}^{(ef\text{-}ECJ)}$.**

Par conséquent, si nous supposons que le système se trouve en expansion les dernières entrées seront généralement supérieures.

Même si la propriété précédente n'est pas vérifiée, il est important d'investiguer le quotient entre les entrées à deux âges qui donne lieu à l'expression suivante:

$$\mathbf{A_{ECC}^{(ef\text{-}ECC)} / A_{ECJ}^{(ef\text{-}ECJ)} = 1 + c(ef\text{-}ECj,ef\text{-}ECC)} \qquad \textbf{[12]}$$

où c(ef-ECj, ef-ECC) est le taux de croissance du nombre des entrées entre les moments "ef-ECJ" et "ef-ECC ", qui sera positive si le système se trouve en expansion.

Comme la longueur de la période où on vérifie les deux types des entrées est égal à la différence entre les âges centraux de retraite et de cotisations **(ECJ-ECC)**, nous pouvons définir un taux "$c^{(D)}$ " constante de manière à produire la relation suivante:

$$(\mathbf{1+ c^{(D)}})^{\mathbf{(ECJ\text{-}ECC)}} = \mathbf{1 + c(ef\text{-}ECj,ef\text{-}ECC)} \qquad \textbf{[13]}$$

Par conséquent, **"$c^{(D)}$"** est le taux annuel de croissance moyenne des entrées de cotisants de la période spécifique (ef- ECJ, ef- ECC) de la longueur ECJ-ECC, que nous appelons la période de récupération.

À partir de cela, nous pouvons transformer l'expression **[11]** de la manière suivante :

$$\mathbf{TCR = \frac{TMJ^{(D)}}{TMC^{(D)}} * \frac{SBJ\,.TR}{SMC^{(D)}} * (1+ c^{(D)})^{ECC\text{-}ECJ}} \qquad \textbf{[14]}$$

Cette formulation est semblable à celle qui apparaît dans une analyse préalable où on suppose l'invariabilité dans le temps des taux de mortalité[9]. Dans ce document on démontre que le taux **"c"** peut être associé au taux d'intérêt technique du système par répartition pour l'année qui commence en **T= ef-ei.**

Un résultat additionnel est présenté, soit le taux **"c"** qui est équivalent au taux d'intérêt technique associé à des membres de la cohorte qui entame son activité durant la première année de l'horizon d'analyse (T=0).
En suivant une méthodologie d'analyse semblable, nous pouvons conclure que le taux d'intérêt technique du régime de répartition **"$i_R$"** pour l'année qui commence en **T=ef-ei** serait égal à **"$c^{(D)}$"**.

Nous ne pouvons pas dire la même chose en ce qui concerne la seconde propriété posée précédemment puisque quand il y aura du dynamisme dans la mortalité, le taux **"$c^{(D)}$"** ne coïncidera pas avec les taux d'intérêt technique associés avec aucune des générations futures qui seront intégrées au système par répartition.

**Exemple :**

*Dans le but de clarifier l'analyse précédente, nous considérerons un exemple qui nous permettra de montrer le chemin pour le calcul du taux d'intérêt technique du système par répartition dans le long terme.*

*Pour cela nous supposerons les probabilités de survie qui figurent dans le Tableau 1; un âge de début de l'activité égale à l'âge j=2 et un âge de retraite à l'âge j=7. Le salaire d'activité est constant pour l'analyse et est égal à 10.000 unités monétaires ; le salaire de base retraite est du même niveau et le taux de remplacement est de 60%.*

---

[9] Luis Camacho: "Análisis de la tasa de rentabilidad implícita en el equilibrio financiero de un sistema de reparto". Banco de Previsión Social. Comentarios de la Seguridad Social No 10. Enero-Marzo 2006

*Les valeurs sont exprimées en termes de salaires constants en supposant qu'il n'existe pas de mobilité salariale verticale.*

*Comme il a été établi, il est nécessaire que des projections démographiques du système fournissent des données sur les entrées de cotisants effectives. Dans notre exemple, cette information figure dans les premières colonnes des tableaux 2 et 3.*

*Le tableau 2 inclus les probabilités de survie qui sont identiques à celles de la dernière colonne du tableau 1, les cotisants par âge dans la décennie qui commence en T=7, le salaire unitaire, la masse salariale par âge de cette décennie. La dernière colonne montre le résultat du produit des valeurs des colonnes III et V.*

**TABLEAU 2**

**MASA SALARIAL**
**DÉCENNIE QUI EST ENTAMÉE EN T=7**

| ÂGE DE T=7 | ENTRÉES T= | QUANTITÉ | PROBABILITÉ SURVIE | COTISANTS ACTUELS | SALAIRE UNITAIRE | MASSE SALARIALE | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **J** | I | II | III | IV | V | VI | III*V |
| 2 | 7 | 14,053 | 1 | 14053 | 10000 | 140,531,420 | 10,000 |
| 3 | 6 | 13,778 | 0.998055 | 13751 | 10000 | 137,507,869 | 9,981 |
| 4 | 5 | 13,376 | 0.991036 | 13256 | 10000 | 132,564,007 | 9,910 |
| 5 | 4 | 12,862 | 0.974139 | 12529 | 10000 | 125,292,090 | 9,741 |
| 6 | 3 | 12,249 | 0.933623 | 11436 | 10000 | 114,362,833 | 9,336 |
| **TOTAUX** | | | **4.897** | | | **650,258,218** | **48,969** |

**J et T EXPRIMÉ EN DÉCENNIE**

*À partir des chiffres qui figurent dans la rangée de totaux, nous pouvons ainsi trouver les valeurs caractéristiques d'une plus grande signification :*

$$TMC^{(D)} = 4.897 \quad y \quad A_{ECC}^{(ef\text{-}ECC)} = 650.258.218 / 48.969 = 13.279$$

*Par conséquent, le temps moyen de cotisations est 4,897 décennies, et le nombre des entrées qui en T=7 ont l'âge central de cotisations est de 13.279 unités. Cette dernière valeur est celle qui nous permet de trouver l'âge central de cotisations. Pour cela tenons compte que dans la colonne II du tableau, les âges (J) en T=7 qui ont les nombre des entrées les plus proches à 13.279, sont J=4 et J=5. Par une interpolation linéaire entre les nombre des entrées à ces âges nous pouvons trouver l'âge central de cotisations. Dans ce cas ECC= 4,189 ce qui représente 41,89 années.*

*Nous pouvons maintenant inclure les valeurs concrètes dans l'expression [12] et calculer le niveau des cotisations durant la dernière année considérée :*

$$Cotisations = 4.897 * 10.000 * 13.279 * TCR$$

*Dans le tableau suivant on présente l'information correspondant aux pensions :*

TABLEAU 3
MONTANT DE PENSIONS

| ÂGE DE T=7 | ENTRÉES T= | QUATITE | PROBABILITÉ SURVIE | PENSIONNÉS ACTUELS | PENSION UNITAIRE | PENSIONS TOTAUX | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **J** | I | II | III | IV | V | VI | III*V |
| 7 | 2 | 11,556 | 0.838306 | 9687 | 6000 | 58,124,763 | 5,030 |
| 8 | 1 | 10,800 | 0.652819 | 7050 | 6000 | 42,302,689 | 3,917 |
| 9 | 0 | 10,000 | 0.321041 | 3210 | 6000 | 19,262,466 | 1,926 |
| **TOTAUX** | | | **1.812** | | | **119,689,918** | **10,873** |

**J et T**EXPRIMÉS DÉCENNIES

*Comme dans le cas précédent, à partir des chiffres qui figurent dans la rangée de totaux, nous pouvons trouver les valeurs d'une plus grande signification:*

$TMJ^{(D)} = 1.812$   *y*   $A_{ECJ}^{(ef\text{-}ECJ)} = 119.689.918 / 10.873 = 11.008$

*Dans la colonne II, nous apprécions que les âges en T=7, qui ont des entrées plus proches à celles de ECJ, soient J=7 et J=8. En effectuant une interpolation linéaire de ces valeurs nous arrivons à ECJ= 7.725, qui dans d'autres termes signifie que l'âge central de retraite est égal à 77.3 ans.*

*Les valeurs spécifiques pour l'expression [13] dans ce cas seraient :*

$$Pensions = 1.812 * 10.000 * 0.6 * 11.008 = 119.689.918$$

*Nous sommes maintenant dans des conditions de trouver le niveau du taux de contribution d'équilibre, pour cela nous posons pour ce cas les valeurs de [14]:*

$$TCR = \frac{1.812}{4.897} * \frac{10.000*0.6}{10.000} * \frac{11.008}{13.279} = 18.41\%$$

*Par conséquent, le taux de contributions d'équilibre est de 18.41% de la masse salariale.*

*Cependant, le résultat d'un plus grand intérêt est de calculer le taux d'intérêt technique associé au régime par répartition pour la période qui débute en T=7. Pour cela nous donnons des valeurs à l'expression [13], dont nous devons trouver "$c^{(D)}$".*

$$(1 + c^{(D)})^{(7.725-4.189)} = 13.279/11.008 = 1.2063$$

*En dégageant, on obtient la valeur de $c^{(D)}$ = 5.45%, qui est le taux décennal d'intérêt technique associé au système par répartition, qui à son tour équivaut à un taux annuel réel de 0.53%.*

## AJUSTEMENTS PARAMÉTRIQUES AU SYSTÈME PAR RÉPARTITION

Il est important de réitérer que la situation financière actuelle du système par répartition et les résultats financiers à moyen terme ne sont pas pertinents pour cette analyse. On évaluera spécifiquement les changements qui affecteront exclusivement les générations futures qui pourront être effectives dans un horizon de terme très long.

Par conséquent, cette analyse permettra de visualiser les aspects financiers du système par répartition sur la base de variations stratégiques qui auront un effet sur un futur éloigné, indépendamment de l'évolution historique du système.

En ce sens, nous considérons que les résultats précédents aideront à effectuer de façon simple des changements paramétriques, sans perdre de vue l'équilibre financier global nécessaire du régime par répartition.

Nous considérons que ces changements peuvent être séparés dans deux catégories pures; d'une part ceux qui impliquent des variations dans le taux de contribution, le taux de remplacement et/ou salaire de base de retraite; et d'autre part, ceux qui impliquent des ajustements de l'âge de retraite. Évidemment il est possible de considérer des combinaisons de changements dans les diverses catégories. Cependant, dans le but de simplifier l'analyse nous considérons ces deux catégories séparément.

### 1) Changements des taux de contributions, de remplacement et/ou de salaire de base de retraite.

Le salaire de base de retraite est représenté par la moyenne des salaires en activité qui sont utilisés pour le calcul de la pension initiale. Le calcul du salaire de retraite dépend de la quantité d'années d'activité utilisée pour le calcul ainsi que du type d'indice qui est utilisé pour la mise à jour des salaires à la date de la retraite.

Par rapport au salaire de base de retraite, les changements peuvent être moins significatifs que ceux des taux de contribution et de remplacement. Cependant, il existe certains cas où la variation dans la forme du salaire de base de retraite acquiert de l'importance, spécialement quand elle sera à l'origine calculée à partir de la moyenne des dernières années d'activité et/ou sans aucun type d'indexation.

En tout cas, la relation entre ces trois paramètres peut être formulée en utilisant l'expression suivante, déduite de l'équation d'équilibre posée en **[14]:**

$$\mathbf{TCR = K * SBJ * TR} \qquad \mathbf{[15]}$$

$$\text{avec } \mathbf{K = \frac{TMJ^{(D)} * (1+c^{(D)})^{ECC-ECJ}}{TMC^{(D)} * SMC^{(D)}}}$$

Toute combinaison **TCR, SBJ et TR,** qui satisfait l'égalité **[15]** est une alternative à considérer pour une possible réforme paramétrique.

Par conséquent, le niveau de flexibilité pour des changements est très vaste puisqu'il est possible d'effectuer la réforme en tout ou en partie des paramètres sans perdre l'équilibre de long terme.

**Exemple:**

*Si nous poursuivons avec le cas soumis à étude, nous pouvons analyser diverses possibilités de changements de TCR et TR, mais pas dans le salaire de base de retraite, puisque nous avons supposé la non-existence de mobilité salariale verticale.*

*Cependant nous pouvons apprécier que pour ce cas il existe la relation suivante entre TCR et TR:*

$$0.306842 * TR = TCR$$

*Par conséquent, il y a de multiples combinaisons de TR* et *TCR qui satisfont la relation précédente. Dans le tableau suivant nous présentons quelques cas possibles:*

| | CAS 1 | CAS 2 | CAS 3 | CAS 4 | CAS 5 | CAS 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| TCR | **20,00%** | **19,00%** | **18,00%** | **17,00%** | **16,00%** | **15,00%** |
| TR | **65,18%** | **61,92%** | **58,66%** | **55,40%** | **52,14%** | **48,89%** |

*Un aspect qui a de l'importance pratique, est que bien que pour cette analyse on ne prend pas en considération ce qui arrive dans le présent, concomitamment avec la réforme pour les générations futures, il est nécessaire d'évaluer des changements pendant la transition pour qu'on obtienne une certaine continuité dans l'évolution du système. Pour cette raison, bien que les actuels affiliés aient des droits acquis qui dépendent de leur ancienneté dans le régime, ces droits seront nécessairement affecter par l'application progressive des réformes prévues pour les nouvelles générations.*

Ainsi par exemple, supposons que l'équilibre actuel est obtenu avec un taux de contribution de 18% (lequel taux ne peut augmenter en raison d'une haute pression fiscale), et un taux de remplacement de 70%. Il existe un écart significatif entre le taux de remplacement présent et le taux qui peut être accordé aux nouvelles générations. Pour maintenir un certain degré de continuité, on devrait nécessairement effectuer des baisses successives du niveau de cette variable pour les générations actuelles de façon d'arriver à 60% en manière progressive.

### 2) Changements de l'âge de retraite

Pour évaluer effectivement des augmentations de l'âge de retraite, il est nécessaire qu'on effectue de nouvelles projections démographiques du système qui prennent en compte ces changements. Ainsi on disposerait d'information sur la nouvelle évolution du nombre des entrées prévues pour tout l'horizon d'analyse.

Avec cette information et en appliquant les formules associées à l'équation d'équilibre du système dans le long terme, on peut évaluer les nouveaux taux de contribution et/ou de remplacement qui résulteraient de l‘application de notre méthodologie.

## L'ÉQUATION D'ÉQUILIBRE INDIVIDUEL POUR LES MEMBRES DE LA PROCHAINE COHORTE

Considérons comme prochaine cohorte celle qu'il entame son d'activité en T=0. Dans un tel cas son évolution pourra être présentée comme :

$$\{ \mathbf{l_{ei}^{(0)}; l_{ei+1}^{(0)}; l_{ei+2}^{(0)};\ldots\ldots\ldots;l_{ei+h}^{(0)};\ldots\ldots\ldots l_{ef}^{(0)}} \}$$

Avec $\mathbf{l_{ei}^{(0)} = l_{ei}}$ puisque toutes les cohortes considérées dans cette analyse débutent avec un niveau égal à “$l_{ei}$”.

En suivant une analyse sur l'équilibre individuel[10], il est possible de formuler l'équation d'équilibre par l'égalité entre les valeurs actuelles des cotisations et des pensions attendues pour un membre typique de cette cohorte. Dans l'analyse mentionnée on suppose des taux de mortalité constants ce qui pourrait être le cas si on prend en compte l’évolution particulière de la cohorte.

Dans ce cas, les âges centraux sont calculés selon l’âge de cotisation central ECC (0) et selon la relation suivante pour la **valeur actuelle des cotisations au moment T=0:**

$$VAC^{(0)} = \left[ \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} Sj * l^{(0)}_j \,/\, l^{(0)}_{ei} \right] * TC * (1+i)^{(ei-ECC(0))} \qquad [16]$$

où “**TC”** est le taux de contribution équilibre et d' **“i”** le taux d'intérêt technique associé à la cohorte dans l'équilibre financier.

La valeur **actuelle des pensions** peut être formulée comme :

$$VAJ^{(0)} = \left[ \sum_{j=e_r}^{j=e_f} SBJ*TR * l^{(0)}_j \,/\, l^{(0)}_{ei} \right] * (1+i)^{(ei-ECJ(0))} \qquad [17]$$

Nous pouvons, en suivant la méthodologie établie, exprimer l'équation d'équivalence des valeurs actuelles de la manière suivante:

$$TMC^{(0)} *SMC*TC*(1+i)^{(ei-ECC(0))} = TMJ^{(0)}*SBJ*TR*(1+i)^{(ei-ECJ(0))} \qquad [18]$$

[10] Luis Camacho. “Explicitación de las variables que intervienen en el equilibrio financiero individual de un sistema jubilatorio con prestación definida” Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No. 7 (abril-junio 2005)

Les exposants "**0"** indiquent que les calculs dans ce cas sont effectués sur la base **"**$l^{(0)}_j$**"** de la cohorte qui entame son activité dans le moment **T=0**.

Le premier côté de l'équation représente la valeur actuelle des contributions individuelles et le second, celui des prestations.

$\mathbf{TMC^{(0)}}$ et $\mathbf{TMJ^{(0)}}$ représentent les périodes moyennes de cotisations et de retraites quand les taux de mortalité dynamiques sont prises en compte dans l'évolution d'une cohorte;, **SMC** et **SBJ** sont le salaire moyen de cotisations et de base de retraite; **TC** et **TR** sont les taux de contribution et de replacement; **ECC(0)** et **ECJ(0)** sont les âges centraux de cotisations et retraite respectivement.

Supposons maintenant, que chaque membre de cette cohorte, contribue le taux de contribution du régime par répartition **(TCR)** dont le niveau est déterminé par l'expression **[14]**. Dans ce cas l'égalité suivante **TC=TCR** est vraie. Si nous assumons en outre que le taux de remplacement est égal à celui du système par répartition, la variable d'ajustement de l'équation **[19]** sera maintenant le taux d'intérêt "i", au lieu de **TC**, celle qui à son tour influencera la valeur de $\mathbf{ECC^{(0)}}$ et $\mathbf{ECJ^{(0)}}$.

En d'autres termes, en ayant définis TC=TCR, TR et SBJ, la seule variable qu'on peut modifier pour arriver à l'équilibre financier entre les valeurs actuelles de recettes et de dépenses est le taux d'intérêt technique associé $\mathbf{(i^{(0)})}$.

Pour trouver cette valeur, nous pouvons reformuler l'égalité **[19]**:

$$(1+i^{(0)})^{-ECC(0)+ECJ(0)} = \frac{TMJ^{(0)} * SBJ * TR}{TMC^{(0)} * SMC * TCR} \qquad \textbf{[19]}$$

Par conséquent, il suffit d'appliquer la formule précédente pour trouver le taux d'intérêt technique qui dans ce cas est équivalent au taux de rendement attendu que les membres de la première cohorte obtiendraient du régime par répartition avec TCR, TR et SBJ prédéfinis.

Il est en plus nécessaire de tenir compte que l'analyse des systèmes par répartition[11], démontrait que si des taux de mortalité sont constants, $\mathbf{i^{(0)}}$ et $\mathbf{i_R}$ sont semblables[12]. Le taux d'intérêt technique associé au système par répartition, serait aussi équivalent au taux d'intérêt technique associé à un cotisant qui entame son activité en T=0.

Avec l'inclusion de taux de mortalité dynamiques, cette propriété n'est plus valable parce que les probabilités de survie considérées dans l'équation d'équilibre du système par répartition ne sont pas les mêmes que pour la cohorte initiale. Ensuite nous présentons un exemple où on peut clairement apprécier cette différence.

**Exemple:**

*Nous considérons le même exemple qu'avant et les probabilités de survie pour la cohorte initiale se trouvent dans l'inférieur diagonal du Tableau 1.*

---

[11]Luis Camacho: "Análisis de la tasa de rentabilidad implícita en el equilibrio financiero de un sistema de reparto". Banco de Previsión Social. Comentarios de la Seguridad Social No 10.

[12] On n'atteint pas précisément l'égalité entre les taux d'intérêt technique de la génération initiale et du système par répartition parce que le taux de croissance du nombre des entrées peut être variable. Le taux du système par répartition n'est pas en outre calculé pendant le même horizon, mais pendant la période de récupération totale ECJ-ECC. Cependant, les différences entre les deux taxes sont non significatives.

*En tenant compte de la relation posée en [19], nous pouvons calculer, par un processus d'itérations successives, le niveau spécifique pour ce cas le taux d'intérêt. Le résultat final de ce processus est:*

*Pour des entrées en T=0*

$$(1.05035)^{(-3.911+7.705)} = \frac{1.792 * 10.000 * 0.6}{4.849 * 10.000 * 0.1841}$$

*Par conséquent, pour un membre de la cohorte initiale avec un taux de contribution de 18.41% et un taux de remplacement de 60%, le taux d'intérêt technique (rendement) est de 5.03% pour la décennie, ce qui équivaut à 0.49% annuel. Si nous le comparons avec le taux d'intérêt technique du système par répartition de l'exemple de 0.53%, nous voyons que la différence n'est pas significative.*
*Nous calculerons par la suite, le taux d'intérêt technique associé à la génération suivante. Pour cela nous utilisons les probabilités de survie qui figurent dans la diagonale associée aux personnes qui entament leur activité en T=1. Dans ce cas il s'Agit de la relation posée en [19]:*

*Pour des incorporations en T=1*

$$(1.0533)^{(-3.914+7.705)} = \frac{1.812 * 10.000 * 0.6}{4.875 * 10.000 * 0.1841}$$

*Pour cette nouvelle génération le taux d'intérêt technique décennal sera de 5.33% ce qui équivaut à 0.52% annuel. En conséquence les deux générations successives ont des taux intérêt différents avec le taux plus élevé pour la génération ultérieure. On peut démontrer que c'est aussi vrai pour les générations suivantes. C'est pourquoi à long terme, les taux d'intérêt augmentent.*

La propriété qui apparaît dans l'analyse précédente est que si on change les taux de contributions et de remplacement pour toutes les générations futures, chacune d'elles pourra avoir un taux d'intérêt (rendement interne) technique d'équilibre différents. Cela implique que sous l'hypothèse de dynamisme des taux de mortalité, on voit des redistributions intergénérationnelles claires. Si nous attachions aux taux de rendement interne associés à chacune des générations un exposant qui indique l'année de début de l'activité, nous pouvons affirmer qu'on a la relation suivante:

$$i^{(0)} <= i^{(1)} <=; i^{(2)} <= \ldots\ldots\ldots\ldots <= i^{(ef-ei)}$$

Cette propriété signifie qu'en supposant des améliorations permanentes dans les taux de mortalité pour les différentes générations de manière à obtenir un taux de remplacement fixe, il est nécessaire d'augmenter le taux de contribution. Comme nous supposons que les taux de contributions sont maintenus constants pour toutes les générations, la variable d'ajustement est le taux de rendement interne qui, par les améliorations dans la mortalité, devra être plus grand avec le passage du temps.

## AJUSTEMENTS PARAMÉTRIQUES DYNAMIQUES

Le résultat le plus significatif de l'analyse précédente est celui qui indique qu'une réforme paramétrique avec des taux de contribution et de remplacement uniques et constants dans le temps impliquera nécessairement que les diverses générations intervenantes obtiendront des taux de rendement interne croissants, qui à son tour seront différents des taux d'intérêt technique du système par répartition à long terme.

Puisque nous supposons que les mobilités salariales et les salaires de base de retraite sont égaux pour toutes les générations, les différences sont produites par les changements permanents des probabilités de survie, conséquence directe de l'hypothèse de base d'améliorations des taux de mortalité.

L'idée du type de réforme proposé est que les taux de contribution et de remplacement soient variables dans le temps et par âge pour compenser les variations des probabilités. La fixation de ces taxes a pour but que les taux de rendement interne de toutes les générations futures soient égaux. De cette manière, les taux d'intérêt technique associées au système par répartition seront aussi les mêmes.

Comment atteindre cet objectif? En partant de l'équilibre financier pour la génération initiale, où les taux de contribution **(TCR),** de remplacement **(TR)** et d'intérêt technique **($i^{(0)}$)** sont fixés, nous formulons des expressions variables pour les taux de contribution et de remplacement futurs de sorte que $i^{(0)} = i^{(1)} = i^{(2)} = i^{(3)} = \ldots = i^{(ef-ei)}$ est valable. On peut démontrer que cette propriété est accomplie dans les cas suivants:

**i) Le taux de contribution par âge pour une génération qui entame son activité durant l'année "t" à l'âge "j" est égal à :**

$$TCj^{(t)} = [\, lj^{(0)} / lj^{(t)} \,] * TC \quad (ei<=j<=er-1) \qquad [20]$$

**ii) le taux de remplacement par âge pour une génération qui entame son activité durant l'année "t" à l'âge "j" correspond à :**

$$TRj^{(t)} = [\, lj^{(0)} / lj^{(t)} \,] * TR \quad (er<=j) \qquad [21]$$

Ensuite nous démontrons l'invariabilité du taux d'intérêt technique (rendement interne) pour les différents cas possibles:

1) **pour les diverses générations**. Considérons une génération générique qui entame son activité dans le moment **"t".**

En adaptant les expressions **[16] et [17]** pour ce cas nous pouvons poser la valeur actuelle des cotisations et des pensions associées avec cette cohorte de la manière suivante :

$$VAC^{(t)} = \left[ \sum_{j=e_i}^{j=e_{r-1}} Sj * \frac{lj^{(t)}}{lei} * TCj^{(t)} \right] * (1+i)^{(ei-ECC)} \qquad [22]$$

$$VAJ^{(t)} = \left[ \sum_{j=e_r}^{j=e_f} SBJ*TR\, j^{(t)} * \frac{lj^{(t)}}{lei} \right] * (1+i)^{(ei-ECJ)} \qquad [23]$$

Si nous remplaçons $TCj^{(t)}$ et $TRj^{(t)}$ par les parties droites de **[20]** et **[21],** les valeurs actualisées précédentes deviennent identiques à celles correspondant à la génération initiale. C'est pourquoi l'équation d'équilibre financier est posé comme suit:

$$VAC^{(t)} = VAC^{(0)}$$
$$VAJ^{(t)} = VAJ^{(0)}$$

Par conséquent, les valeurs sont égales à celles de la première génération. C'est pourquoi dans l'équilibre financier, les taux d'intérêt technique sont aussi égaux, ce qui implique que : $i^{(t)} = i^{(0)}$.

2) **pour le système par répartition.** Nous posons ensuite les expressions générales pour les cotisations et les pensions pour l'année ef-ei, sur la base des résultats de **[1], [3] et [4].**

$$\text{Cotisations} = SMC^{(D)} * \sum_{j=e_i}^{j=er-1} \left[ A_j^{(ef-j)} * \frac{l_j^{(ef-j)}}{l_{ei}} * TCR_j^{(ef-j)} \right]$$

$$\text{Retraites} = SBJ * \sum_{j=e_r}^{j=e_f} \left[ A_j^{(ef-j)} * \frac{l_j^{(ef-j)}}{l_{ei}} * TR_j^{(ef-j)} \right]$$

Si nous remplaçons TCR $j^{(t)}$ et TR $j^{(t)}$ par les parties droites de **[20] et [21], les** probabilités de survie, avec **TCR et TR** constants, sont celles de la première génération. Par conséquent, si nous suivons le raisonnement effectué dans des pages précédentes en ce qui concerne le système par répartition, l'équation d'équilibre financier pour l'année qui commence dans “ef-ei” sera égale à:

$$TCR = \frac{TMJ^{(0)}}{TMC^{(0)}} * \frac{SBJ\ .TR}{SMC^{(0)}} * (1+ i_R)^{ECC-ECJ}$$

Comme on peut le constater, toutes les valeurs correspondent précisément à ceux de l'équation d'équilibre de la première génération. C’est pourquoi, dans l'équilibre financier, les taux d'intérêt technique du système par répartition coïncide avec celui de cette cohorte: $\mathbf{i_R = i^{(0)}}$.

## Exemple:

*Nous considérons le cas posé précédemment, où les probabilités de survie figurent dans le tableau 1.*

*L'équation d'équilibre individuel pour les diverses générations, a comme valeurs plus significatives : TC= 18.41% et TR= 60%.*

*Par conséquent, grâce aux équations [21] et [22], il s’ensuit que:*

$$TCj^{(t)} = [\, lj^{(0)} // lj^{(t)} \,] * 0.1841 \qquad j<7$$

$$TRj^{(t)} = [\, lj^{(0)} // lj^{(t)} \,] * 0.6 \qquad j>=7$$

*À partir des valeurs du Tableau 1, nous pouvons construire un nouveau tableau dans lequel figurent les coefficients qui sont multipliés aux taxes de contribution et de remplacement dans le terme droit de l'expression précédente.*

**TABLEAU 4**
**COEFFICIENTS APPLICABLES AUX TAXES FIXES**

| | Instant T | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ÂGE J** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| **2** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **3** | | 1.0000 | 0.9972 | 0.9953 | 0.9940 | 0.9937 | 0.9933 | 0.9930 |
| **4** | | | 1.0000 | 0.9952 | 0.9917 | 0.9899 | 0.9896 | 0.9892 |
| **5** | | | | 1.0000 | 0.9916 | 0.9872 | 0.9855 | 0.9851 |
| **6** | | | | | 1.0000 | 0.9890 | 0.9846 | 0.9829 |
| **7** | | | | | | 1.0000 | 0.9890 | 0.9846 |
| **8** | | | | | | | 1.0000 | 0.9890 |
| **9** | | | | | | | | 1.0000 |

**J Y T EXPRIMÉS DÉCENNIES**

*Par conséquent, on peut obtenir pour chaque unité de temps et âge le taux de cotisations ou celle de remplacement effectifs, à partir du produit des coefficients qui figurent dans le tableau par les taux de cotisations ou de remplacement de base. Ainsi par exemple, pour la dernière période, de tels résultats seraient les suivants.*

**TABLEAU 5**
**TAXES APPLICABLES POUR T ENTRE 7 ET 8**

| AGE J | coef. | TAUX BASE | TAUX VARIABLE |
|---|---|---|---|
| **2** | 1.0000 | 0.1841 | **0.1841** |
| **3** | 0.9930 | 0.1841 | **0.1828** |
| **4** | 0.9892 | 0.1841 | **0.1821** |
| **5** | 0.9851 | 0.1841 | **0.1813** |
| **6** | 0.9829 | 0.1841 | **0.1809** |
| **7** | 0.9846 | 0.6 | **0.5908** |
| **8** | 0.9890 | 0.6 | **0.5934** |
| **9** | 1.0000 | 0.6 | **0.6000** |

*Les taux de contribution pour les âges inférieurs à 7 figurent dans la dernière colonne. Les taux effectifs de remplacement sont présentés pour les autres âges.*

*Les niveaux des taux de contribution et de remplacement sont présentés pour la dernière période d'analyse qui commence à T=7. Les taxes ont des niveaux inférieurs de celles de la génération initiale sauf pour les âges initiaux et finaux,*

*En plus, si nous tenons compte que dans les expressions [23]* ***et*** *[24] figurent respectivement les produits ( $Ij^{(t)}/I_{ei}$ )* $TCj^{(t)}$ et ( $Ij^{(t)}/I_{ei}$ )* $TRj^{(t)}$, et les formules [21]* ***et*** *[22] pour $TCj^{(t)}$* ***et*** *$TRj^{(t)}$ , le résultat final de ces produits est égal à:*

$$(Ij^{(0)}/Iei)*TC \quad et \quad (Ij^{(0)}/I_{ei})*TR$$

*Par conséquent, du point de vue financier, l'équilibre financier individuel pour un membre de chaque génération est obtenu en considérant des valeurs uniques des taux de contribution et de remplacement égaux à ceux de la base. Les probabilités de survie sont égales à celles de la première génération.*

*Par conséquent, pour analyser l'équilibre financier, au lieu de travailler avec l'information du Tableau 1, on peut considérer les probabilités du tableau suivant :*

**TABLEAU 6**
**PROBABILITÉS DE SURVIE APPLICABLES AVEC DES TAXES FIXES**

| | Instant T | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **AGE J** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| **2** | **1.0000** | **1.0000** | **1.0000** | **1.0000** | **1.0000** | **1.0000** | **1.0000** | **1.0000** |
| **3** | | **0.9910** | **0.9910** | **0.9910** | **0.9910** | **0.9910** | **0.9910** | **0.9910** |
| **4** | | | **0.9804** | **0.9804** | **0.9804** | **0.9804** | **0.9804** | **0.9804** |
| **5** | | | | **0.9597** | **0.9597** | **0.9597** | **0.9597** | **0.9597** |
| **6** | | | | | **0.9177** | **0.9177** | **0.9177** | **0.9177** |
| **7** | | | | | | **0.8254** | **0.8254** | **0.8254** |
| **8** | | | | | | | **0.6456** | **0.6456** |
| **9** | | | | | | | | **0.3210** |

**J Y T EXPRIMÉ DÉCENNIES**

*La particularité de ce tableau est que les probabilités qui figurent dans chaque rangée sont constantes, que les diagonales sont aussi égales, et que les probabilités de la dernière colonne sont égales à celle de la diagonale.*

*Comme la diagonale associée à la génération initiale est maintenue égale à celle du tableau 1, on vérifie à nouveau l'égalité suivante en équilibre financier:*

*Pour des incorporations en T=0*

$$(1.05035)^{(-3.911+7.705)} = \frac{1.792 * 10.000 * 0.6}{4.849 * 10.000 * 0.1841}$$

*où 5.035% est le taux d'intérêt technique décennal associé à cette génération, qui est équivalent à 0.49% annuel.*

*Pour les autres générations, les probabilités de survie sont constantes, en termes de l'équivalence implicite du tableau 6, c'est pourquoi elles peuvent être associés avec une équation d'équilibre identique. En conséquence le taux d'intérêt technique sera aussi égal. On accomplit en conséquence l'égalité cherchée des taux d'intérêt pour les diverses générations:*

$$i^{(0)} = i^{(1)} = i^{(2)} = i^{(3)} = \ldots = i^{(ef-ei)} = 0.05035.$$

*En plus, il est possible de calculer le taux d'intérêt technique associé au système par répartition considérant les résultats du tableau 6. Dans ce cas le taux annuel est égal à 0.51%. La petite différence existante entre le niveau du taux associé au système par répartition et de ceux correspondant aux diverses générations est due à l'évolution particulière du nombre des entrées considérées dans la période d'analyse.*

Nous avons proposé un type de réforme dynamique qui implique des changements permanents dans le taux de contribution et dans le taux de remplacement de manière qui compenserait les augmentations des probabilités de survie lesquelles sont aussi projetés avec des changements continuels. Nous reconnaissons que, bien que ce soit théoriquement la solution adéquate pour une réforme paramétrique avec des changements automatiques et permanents, son application pratique peut être complexe. Cependant, ce modèle peut servir le guide pour des solutions qui n'impliquent pas d'ajustements des paramètres de base continuels. Il permet de diminuer l'ampleur de la redistribution entre des générations successives de participants du système par répartition.

## CONCLUSIONS

Dans cette étude, l'équation d'équilibre financier du système par répartition est projeté pour le long terme. Nous analysons une année où tous ses participants seront des membres de générations futures. Par conséquent on ne considère pas les particularités financières du système dans le court et moyen terme.

Ce type d'analyse requiert un système de projections démographiques à très long terme qui fournit l'évolution future des cotisants par année.

Pour une année donnée, le niveau les cotisations et les pensions résultantes est calculé de telle sorte que l'équilibre financier est atteint. Pour que cette équation ait du sens, nous assumons que le système est exclusivement financé avec des contributions des affiliés et que les dépenses d'administration sont insignifiantes.

L'équation classique d'équilibre est reformulée à travers une désagrégation des éléments de la relation démographique, qui permet d'estimer le niveau du taux d'intérêt technique associé au régime par répartition. Avec une telle analyse on conclut que ce taux serait équivalent au taux annuel de croissance moyenne des entrées de cotisants pendant une période spécifique que nous appelons la période de récupération.

D'autre part, les résultats obtenus ont permis de formuler d'une façon simple des changements paramétriques du système, sans perdre de vue l'équilibre financier global nécessaire du régime.

Nous considérons que de tels changements peuvent être groupés dans deux catégories pures; d'une part ceux qui impliquent des variations dans le taux de contribution, le taux de remplacement et/ou salaire de base de retraite; d'autre part par des ajustements à l'âge de retraite.

Pour le premier cas, l'équation de base peut être transformée de sorte qu'on puisse identifier les divers paramètres intervenants et leur incidence dans l'équilibre financier. Pour cela on peut visualiser les multiples alternatives de changements tant dans les taux de contribution que dans les taux de remplacement, et même dans le salaire de base de retraite.

Pour évaluer l'impact d'augmentations de l'âge de retraite, il est nécessaire qu'on effectue préalablement de nouvelles projections démographiques du système. Ainsi on disposerait d'informations sur la nouvelle évolution du nombre des entrées prévues pour toute la période d'analyse. Avec cette information et en appliquant les formules associées à l'équation d'équilibre du système dans le long terme, on peut évaluer les nouveaux taux de contribution et/ou de remplacement

Bien que cette analyse ne prenne pas en considération ce qui arrive dans le présent et le court terme, concomitamment avec la réforme de long terme pour les générations futures, il est nécessaire d'évaluer les changements dans la transition de telle sorte qu'on obtienne une certaine continuité dans l'évolution du système.

En outre, il est important de connaître comment ces réformes paramétriques affectent les diverses générations. Ainsi, nous pouvons affirmer que si le taux de contribution et de remplacement est fixé pour plusieurs générations futures, chaque génération aura un taux d'intérêt (rendement interne) technique d'équilibre différent. Cela impliquera que sous l'hypothèse des taux de mortalité dynamiques il existe une redistribution intergénérationnelle non souhaitée, spécialement des prochaines générations vers celles plus éloignées dans le temps.

En supposant que les mobilités salariales et les salaires de base de retraite sont égaux pour toutes les générations, les différences sont produites par les changements permanents qui sont induites par les probabilités de survie, conséquence directe de l'hypothèse de base d'améliorations des taux de mortalité.

Dans le but de limiter ce type de redistribution on propose un type de réforme où tant les taux de contribution que les taux de remplacement sont variables dans le temps et par âge de manière à compenser les changements des probabilités de survie. De cette manière, les taux d'intérêt technique associés aux diverses générations et au système par répartition seront aussi identiques.

Le dynamisme des changements dans les valeurs des paramètres de base implique l'élimination de la dichotomie des systèmes purs de prestations définies contre des contributions définies, puisque avec l'application de ce type d'ajustements la variation produite tant pour les contributions que pour les prestations dépend des croissances des probabilités de survie dans le temps.

Par conséquent, du point de vue théorique, les changements paramétriques dynamiques permettent de maintenir un niveau constant des taux d'intérêt technique associés aux diverses générations futures. Toutefois, l'application peut être complexe sachant que les ajustements annuels ne seront pas significatifs. Cependant, cette recherche peut être utile comme un guide dans la recherche de solutions non statiques et progressives de sorte qu'il soit possible de diminuer l'ampleur de redistributions entre les générations successives de participants du système par répartition.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES


- Luis Camacho "Algoritmo para la apertura mensual de la tabla de Mortalidad" Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No.7. Abril–Junio de 2005 .

- Luis Camacho. "Explicitación de las variables que intervienen en el equilibrio financiero individual de un sistema jubilatorio con prestación definida" Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No. 7 . Abril-Junio 2005.

- Luis Camacho: "Análisis de la tasa de rentabilidad implícita en el equilibrio financiero de un sistema de reparto". Banco de Previsión Social. Comentarios de la Seguridad Social No 10. Enero-Marzo 2006

- Luis Camacho."La incidencia de la fórmula de cálculo del Sueldo Medio Básico Jubilatorio en el equilibrio financiero individual". Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No. 11 Abril-Junio 2006.

- Luis Camacho. "La tasa de interés técnico actuarial asociada a un sistema de capitalización completa con prima única". Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No.14 .Enero-Marzo 2007.

- Luis Camacho. "Un modelo heurístico para calcular de la tasa de interés técnico de corte asociada a un sistema de Capitalización Parcial". Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No.23 Abril-Junio 2009

- Luis Camacho."Clasificación de los Sistemas de Financiación Colectiva según el Grado de Capitalización. Banco de Previsión Social. Comentarios de Seguridad Social No. 24. Julio-Setiembre de 2009.